Sammlung

von

Lehrsätzen, Formeln

und

Aufgaben

aus

der gewöhnlichen Rechenkunst, Mathematik und Physik

von

Dr. J. Götz,

Professor der Mathematik und Mitgliede mehrerer gelehrten Gesellschaften.

Zweiter Theil.

Berlin.

Druck und Verlag von G. Reimer.

1843.

Sammlung

von

Lehrsätzen, Formeln

und

Aufgaben

aus

der gewöhnlichen Rechenkunst, Mathematik
und Physik

von

Dr. J. Götz,

Professor der Mathematik und Mitgliede mehrerer
gelehrten Gesellschaften.

Zweiter Theil.

Berlin.

Druck und Verlag von G. Reimer.

1843.

Sammlung

von

Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben

aus

der Arithmetik, Algebra

und

allgemeinen Größenlehre

von

Dr. J. Götz,

Professor der Mathematik und Mitgliede mehrerer gelehrten Gesellschaften.

Bayer. Staatsministerium
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei

Berlin.

Druck und Verlag von G. Reimer.

1843.

Inhalt.

I.

Lehrsätze, Formeln und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra.

Erstes Kapitel. Seite
Von den wichtigsten für Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten stattfindenden Gleichungen und Ungleichungen 1
Zweites Kapitel.
Von dem Zifferrechnen mit Klammern 11
Drittes Kapitel.
Von den Kettenbrüchen 15
Viertes Kapitel.
Von dem Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren algebraischer Summen 17
Fünftes Kapitel.
Von den Potenzen und Wurzeln 23
Sechstes Kapitel.
Von einigen Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln 26
Siebentes Kapitel.
Von den Binomial-Coefficienten 36
Achtes Kapitel.
Von dem binomischen Lehrsatze 37
Neuntes Kapitel.
Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Zahlen- und Buchstabenausdrücken 40
Zehntes Kapitel.
Von den allgemeinen Quadratwurzeln und den imaginären Wurzeln 44
Elftes Kapitel.
Von der Ausziehung der Kubikwurzeln aus Zahlen- und Buchstabenausdrücken 50
Zwölftes Kapitel.
Von den Bestimmungsgleichungen im Allgemeinen 55

Dreizehntes Kapitel.

Seite
Von den einfachen algebraischen Gleichungen, oder von den Gleichungen des ersten Grades 58

Vierzehntes Kapitel.

Von den quadratischen und höhern Gleichungen 68

Funfzehntes Kapitel.

Von den unbestimmten Gleichungen oder von den diophantischen Aufgaben 78

Sechzehntes Kapitel.

Von den einfachen arithmetischen Progressionen 81

Siebenzehntes Kapitel.

Von den einfachen geometrischen Progressionen 83

Achtzehntes Kapitel.

Von den Progressionen höherer Art und von den figurirten Zahlen . 85

Neunzehntes Kapitel.

Von den Logarithmen 87

Zwanzigstes Kapitel.

Von den Funktionen und unendlichen Reihen; von den künstlichen und natürlichen Potenzen 90

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Von den kombinatorischen Operationen 95

II.

Lehrsätze, Formeln und Aufgaben aus der allgemeinen Größenlehre.

Erstes Kapitel.

Von der Gleichung, der Ungleichung, der Summe, Differenz, dem Produkte und Quotienten 97

Zweites Kapitel.

Von einigen Anwendungen der allgemeinen Größenlehre auf die Algebra 102

Drittes Kapitel.

Von der Zinseszinsrechnung 130

Viertes Kapitel.

Von einigen vermischten Aufgaben aus der Algebra und allgemeinen Größenlehre 133

I.

Formeln und Aufgaben

aus

der Arithmetik und Algebra.

Erstes Kapitel.

Von den wichtigsten für Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten stattfindenden Gleichungen und Ungleichungen.

Wodurch werden die Zahlen auf eine allgemeinere Weise dargestellt?

Was heißt ein Zahlenausdruck oder blos ein Ausdruck?

Was nennt man eine reelle Zahl?

Was heißt eine rationale und was eine irrationale Zahl?

Was heißt ein additiver und was ein positiver Ausdruck (oder Zahl)?

Was wird ein subtraktiver und was ein negativer Ausdruck (oder Zahl) genannt?

Was heißt eine allgemeine Summe, Differenz, Produkt und Quotient?

Was nennt man eine algebraische Summe?

Was wird eine allgemeine Gleichung oder Formel genannt?

Was heißt eine arithmetische und was eine geometrische Proportion?

Was versteht man unter den Gliedern einer Proportion, und wann wird letztere eine stetige genannt?

Was heißt die mittlere stetige arithmetische oder geometrische Proportionalzahl?

Was heißt eine Größe (Quantität und Quantum)?

Was lehrt die Mathematik, und wie wird dieselbe eingetheilt?

Womit beschäftigt sich die Zahlenlehre oder Arithmetik?

Was heißt Größenlehre, und wie wird dieselbe eingetheilt?

Welche Sätze stellt die allgemeine und welche die besondere Größenlehre auf?

Was heißt eine Erklärung, ein Grundsatz, Lehrsatz und Zusatz?

Was versteht man unter einem Beweise?

Was heißt Voraussetzung und Behauptung; und was wird eine Anmerkung genannt?

Formeln.

1) Es ist $a=a$, $b=b$, ꝛc.

2) Ist $a=b$ und $b=c$, so folgt $a=c$;

3) Ist $a=b=c=d$, so ergiebt sich $a=d$;

4) $a+b=b+a$;

5) $\left\{\begin{array}{l}(a+b)+c=(a+c)+b=(b+a)+c=(b+c)+a \\ \quad =(c+a)+b=(c+b)+a, \\ \text{oder } a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a \\ \quad =c+a+b=c+b+a\end{array}\right\}$;

6) $\left\{\begin{array}{l}a+b+c+d+e+\ldots\ldots=a+b+d+c+e+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a+b+c+d)+(e+f+g)=a+b+c+d+e+f+g\end{array}\right\}$;

7) Ist $a=b$, so folgt $a+m=b+m$;

8) Ist $a=b$ und $c=d$, so erhält man $a+c=b+d$;

9) $(a-b)+b=a$;

10) $(a+b)-b=a$;

11) $\left\{\begin{array}{l}(a+b+c)-c=a+b, \\ (a+b+c+d)-(b+d)=a+c\end{array}\right\}$;

12) Ist $a=b$, so folgt $a-m=b-m$;

13) Ist $a=b$, so ergiebt sich $m-a=m-b$;

14) Ist $a=b$ und $c=d$, so erhält man $a-c=b-d$;

15) Ist $a+m=b+m$, so folgt $a=b$;

16) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$;

17) $(a+b+c)-d=(a-d)+b+c=a+(b-d)+c=a$
$+b+(c-d)$;

18) $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$;

19) $a-(b+c+d)=[(a-b)-c]-d$;

20) $a-(b-c)=(a+c)-b$;

21) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$;

22) $(a-b)+(c-d)+(e-f)=(a+c+e)-(b+d+f)$;

23) $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$;

24) $(a+m)-(b+m)=a-b$;

25) $(a-m)-(b-m)=a-b$;

26) $a-a=b-b=x-x$;

27) Ist $a=b$, so folgt $a.m=b.m$;

28) Ist $a=b$ und $c=d$, so ergiebt sich $a.c=b.d$;

29) $ab=a+a+a+\ldots\ldots$ b mal, wenn b eine ganze Zahl und >1 ist:

30) $(a+b).m=am+bm$;

31) $(a+b+c).m=am+bm+cm$;

32) $(a+b+c+d+\ldots\ldots).m=am+bm+cm+dm+\ldots\ldots$;

33) $a.(m+1)=am+a$;

34) $a.(m+n)=am+an$;

35) $a.(m+n+v)=am+an+av$;

36) $a.(m+n+v+w+\ldots\ldots)=am+an+av+aw+\ldots\ldots$;

37) $(a+b).(c+d)=ac+bc+ad+bd$;

38) $(a+b+c).(d+e+f)=ad+bd+cd+ae+be+ce+af+bf+cf$;

39) $(a+b+c+d+\ldots\ldots).(e+f+g+\ldots\ldots)$
$=ae+be+ce+de+\ldots\ldots+af+bf+cf+df+\ldots\ldots$
$+ag+bg+cg+dg+\ldots\ldots$;

40) $(a-b).m=am-bm$;

41) $a.(m-n)=am-an$;

42) $(a-b).(c-d)=(ac-bc)-(ad-bd)$
$=(ac+bd)-(bc+ad)$;

43) $ab=ba$;

44) $(ab).c=(ac).b=(ba).c=(bc).a=(ca).b=(cb).a$;

45) $abcde\ldots\ldots=edcba\ldots\ldots$;

46) $(abcd).(efghi)=aebgcdhif$;

47) $\frac{a}{b}.b=a$ *);

48) $\frac{ab}{a}=a$;

49) $\frac{abc}{c}=ab$;

50) $\frac{abcd}{bd}=ac$;

51) Ist $a=b$, so folgt: $\left\{\begin{matrix}\frac{a}{m}=\frac{b}{m}\\ \frac{m}{a}=\frac{m}{b}\end{matrix}\right\}$;

*) Man bemerke, daß die Gleichungen zwischen Quotienten nur dann nothwendig richtig sind, wenn keiner der Divisoren der Null gleich ist.

52) Ist $a = b$ und $c = d$, so ergiebt sich $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$;

53) Ist $a.m = b.m$, so folgt $a = b$, wenn m nicht o ist;

54) $\frac{a.b}{c} = \frac{a}{c}.b = a.\frac{b}{c}$;

55) $\frac{abc}{d} = \frac{a}{d}.b.c = a.\frac{b}{d}.c = a.b.\frac{c}{d}$;

56) $a:(b.c) = (a:b):c = (a:c):b$;

57) $a:(b.c.d) = [(a:b):c]:d$;

58) $a:\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ac}{b}$;

59) $a + \frac{b}{c} = \frac{a.c + b}{c}$;

60) $\frac{a}{b} + c = \frac{a + b.c}{b}$;

61) $a - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}$;

62) $\frac{a}{b} - c = \frac{a - bc}{b}$;

63) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$;

64) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{e}{f} = \frac{a.c.e}{b.d.f}$;

65) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c} = \frac{a:c}{b:d}$;

66) $\frac{a.m}{b.m} = \frac{a}{b}$;

67) $\frac{m.a}{m.b} = \frac{a}{b}$;

68) $\frac{a:m}{b:m} = \frac{a}{b}$;

69) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$;

70) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+b+c}{m}$;

71) $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}+\ldots=\frac{a+b+c+d+\ldots}{m}$;

72) $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$;

73) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$;

74) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a.d.f+c.b.f+e.b.d}{b.d.f}$;

75) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\frac{g}{h}+\ldots$
$=\frac{a.d.f.h\ldots+c.b.f.h\ldots+e.b.d.h\ldots+g.b.d.f\ldots+\ldots}{b.d.f.h\ldots}$,

76) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a.d-c.b}{b.d}$;

77) $\frac{Z}{N}=x+\frac{Z-x.N}{N}$;

78) $\frac{a+b+c}{d+e+f}=h+\frac{(a+b+c)-h.(d+e+f)}{d+e+f}$;

79) $\frac{a+b+c+\ldots}{d+e+f+\ldots}=h+\frac{(a+b+c+\ldots)-h.(d+e+f+\ldots)}{d+e+f+\ldots}$
$=h+\frac{(a-hd)+(b-he)+(c-hf)+\ldots}{d+e+f+\ldots}$;

80) $a+o=a$;
81) $o+o=o$;
82) $o+o+o=o$;
83) $a-o=a$;
84) $o-o=o$;
85) $+a=o+a=a$;
86) $-a=o-a$;
87) $(+a)+(+b)=+(a+b)$;
88) $(+a)+(+b)+(+c)=+(a+b+c)$;
89) $(-a)+(-b)=-(a+b)$;
90) $(-a)+(-b)+(-c)=-(a+b+c)$;
91) $(+a)+(-b)=+(a-b)$;
92) $(+a)+(-b)=-(b-a)$;
93) $(+a)+(-a)=o$;
94) $-(-a)=+a$;

95) $(+a)-(+b)=(+a)+(-b)$;
96) $(+a)-(-b)=(+a)+(+b)$;
97) $(-a)-(+b)=(-a)+(-b)$;
98) $(-a)-(-b)=(-a)+(+b)$;
99) $a.1=a$;
100) $1.1=1.1.1=1$;
101) $a.0=0.a=0$;
102) $0.0=0.0.0=0$;
103) $\frac{a}{a}=1$;
104) $\frac{1}{1}=1$;
105) $\frac{a}{1}=a$;
106) $\frac{0}{a}=0$;
107) $(+a).(+b)=+(ab)$;
108) $(-a).(-b)=+(ab)$;
109) $(+a).(-b)=-(ab)$;
110) $(-a).(+b)=-(ab)$;
111) $(+a):(+b)=+\left(\frac{a}{b}\right)$;
112) $(-a):(-b)=+\left(\frac{a}{b}\right)$;
113) $(+a):(-b)=-\left(\frac{a}{b}\right)$;
114) $(-a):(+b)=-\left(\frac{a}{b}\right)$;
115) $(a-b+c-d)+(e-f-g)=a-b+c-d+e-f-g$;
116) $(-a+b-c-d-e)+(-g+h-k+l)$
$=-a-g+b+h-c-k-d+l-e$;
117) $(a+b-c-d)-(e+f-g-h)$
$=a+b-c-d-e-f+g+h$;
118) $(a-b+c-d).(+e)=ae-be+ce-de$;
119) $(a-b-c+d).(-e)=-ae+be+ce-de$;
120) $(a-b+c-d).(e-f+g)$
$=ae-be+ce-de-af+bf-cf+df+ag-bg+cg-dg$;
121) $(a-b+c-d):(+e)=\frac{a}{e}-\frac{b}{e}+\frac{c}{e}-\frac{d}{e}$;
122) $(-a-b+c-d):(-e)=\frac{a}{e}+\frac{b}{e}-\frac{c}{e}+\frac{d}{e}$;

123) Ist $a-b=c-d$, so folgt $a+d=b+c$;

124) Ist $a-b=b-c$, so folgt $\left\{\begin{matrix} 2b=a+c \\ \text{oder } b=\frac{a+c}{2} \end{matrix}\right\}$

125) Ist $a+d=b+c$, so ergiebt sich $a-b=c-d$;
126) Ist $a-b=c-d$, so folgt $a=(b+c)-d$;
127) Ist $a-b=c-d$, „ „ $b=(a+d)-c$;
128) Ist $a-b+c-d$, „ „ $c=(a+d)-b$;
129) Ist $a-b=c-d$, „ „ $d=(b+c)-a$;
130) Ist $a-b=c-d$, „ „ $d-b=c-a$;
131) Ist $a-b=c-d$, „ „ $a-c=b-d$;
132) Ist $a-b=c-d$, „ „ $b-a=d-c$;
133) Ist $a:b=c:d$, so ergiebt sich $a.d=b.c$;
134) Ist $a:b=b:c$, „ „ „ $b.b=a.c$;
135) Ist $a.d=b.c$, „ „ „ $a:b=c:d$;

136) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $a=\frac{b.c}{d}$;

137) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $b=\frac{a.d}{c}$;

138) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $c=\frac{a.d}{b}$;

139) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $d=\frac{b.c}{a}$;

140) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $d:b=c:a$;
141) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $a:c=b:d$;
142) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $b:a=c:d$;
143) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $(an):(bn)=c:d$;
144) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $a:b=(cn):(dn)$;

145) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=c:d$;

146) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $a:b=\frac{c}{n}:\frac{d}{n}$;

147) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $(a+nb):b=(c+nd):d$;
148) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $(a+b):b=(c+d):d$;
149) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $(a-nb):b=(c-nd):d$;
150) Ist $a:b=c:d$, „ „ „ $(a-b):b=(c-d):d$;
151) Ist $a:b=c:d$, so folgt $(a+c):(b+d)=a:b$;
152) Ist $a:b=c:d$, „ „ $(a-c):(b-d)=a:b$;
153) Ist $a:b=c:d=e:f$, so folgt $(a+c+e):(b+d+f)=a:b$;

154) Ist $\left\{\begin{matrix} a:b=c:d \\ e:f=g:h \end{matrix}\right\}$, „ „ $(ae):(cf)=(cg):(dh)$;

155) Ist $\left\{\begin{matrix} m:n=o:p \\ q:r=s:u \\ x:y=v:w \\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\}$, so erhält man $(mqx\ldots):(nry\ldots) = (osv\ldots):(puw\ldots)$;

156) Ist $a>b$, so folgt $a=b+x$, wenn x ein positiver Ausdruck ist*).

157) Ist $a=b+x$, so folgt $a>b$, wenn x ein positiver Ausdruck ist.

158) Es ist $+a>o$, wenn $+a$ eine positive Zahl ist.;

159) Es ist $-a<o$, wenn $-a$ eine negative Zahl ist;

160) Ist $a>b$ und $b=c$, so folgt $a>c$;

161) Ist $a>c$ „ $a=b$, „ „ $b>c$;

162) Ist $a>b$ „ $b>c$, „ „ $a>c$;

163) Ist $a>b$ „ $c=d$, „ „ $a+c>b+d$;

164) Ist $a=b$ „ $c>d$, „ „ $a+c>b+d$;

165) Ist $a>b$ „ $c>d$, „ „ $a+c>b+d$;

166) Ist $a=b$ „ $c>d$, „ „ $a-d>b-c$;

167) Ist $a>b$ „ $c=d$, „ „ $a-c>b-d$;

168) Ist $a>b$ „ $c>d$, „ „ $a-d>b-c$;

169) Ist $a>b$ „ $c=d$, „ „ $a.c>b.d$, wenn c und d positiv sind;

170) Ist $a=b$ „ $c>d$, „ „ $a.c>b.d$, wenn a und b positiv sind;

171) Ist $a>b$ „ $c>d$, „ „ $a.c>b.d$, wenn a, b, c und d positiv sind;

172) Ist $a>b$ „ $c=d$, „ „ $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$, wenn c und d positiv sind;

173) Ist $a=b$ „ $c>d$, „ „ $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$, wenn a, b, c und d positiv sind;

174) Ist $a>b$ „ $c>d$, „ „ $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$, wenn a, b, c und d positiv sind.

---

*) In dieser und in den folgenden Nummern bedeuten die Buchstaben im Allgemeinen reelle Zahlen. Sollen sie aber positive oder negative Zahlen ausdrücken, so wird dies jedesmal besonders bemerkt.

Zweites Kapitel.

Von dem Zifferrechnen mit Klammern *).

Wie wird ein beliebig durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zusammengesetzter Ausdruck berechnet?

Wie werden in einem zusammengesetzten, mit oder ohne Klammern versehenen Ausdrucke die einzelnen Zahlen genannt?

Aufgaben.

1) Man	soll	den	Ausdruck	$24 + 36 : 6 - 2 + 5$	berechnen;
2) =	=	=	=	$(24 + 36) : 6 - 2 + 5$	=
3) =	=	=	=	$(24 + 36) : 6 - (2 + 5)$	=
4) =	=	=	=	$(24 + 36) : (6 - 2) + 5$	=
5) =	=	=	=	$(24 + 36 : 6) - 2 + 15$	=
6) =	=	=	=	$24 + 36 : (6 - 2) + 5$	=
7) =	=	=	=	$24 + 36 : (6 - 2 + 5)$	=
8) =	=	=	=	$12 + 24 : 6 - 2$	=
9) =	=	=	=	$(12 + 24) : 6 - 2$	=
10) =	=	=	=	$12 + 24 : (6 - 2)$	=
11) =	=	=	=	$(12 + 24) : (6 - 2)$	=
12) =	=	=	=	$4 . 6 + 36 : 6 - 2$	=
13) =	=	=	=	$4 . (6 + 36 : 6 - 2)$	=
14) =	=	=	=	$(4 . 6 + 36) : 6 - 2$	=
15) =	=	=	=	$4 . 6 + 36 : (6 - 2)$	=
16) =	=	=	=	$4 . (6 + 36) : 6 - 2$	=
17) =	=	=	=	$(4 . 6 + 36) : (6 - 2)$	=
18) =	=	=	=	$4 . (6 + 36) : (6 - 2)$	=
19) =	=	=	=	$4 . [(6 + 36) : 6 - 2]$	=
20) =	=	=	=	$4 . [6 + 36 : (6 - 2)]$	=

*) Da die vier Spezies in ganzen Zahlen in gewöhnlichen und Dezimalbrüchen schon im ersten Bande vorkommen, so werden dieselben hier nicht weiter erwähnt.

21) Man soll den Ausdruck $36+3.8-6:3+5.4$ berechnen;
22) = = = = $(36+3).8-6:3+5.4$ =
23) = = = = $36+(3.8-6):3+5.4$ =
24) = = = = $[36+(3.8-6):3+5].4$ =
25) = = = = $(36+3.8-6):3+5.4$ =
26) = = = = $(36+3).8-(6:3+5).4$ =
27) = = = = $(22+3):25+2.(5-2)+8$ =
28) = = = = $24+36:(6+3)-2.(9+1)$ =
29) = = = =
$22+24:(12-4)+12-26:(11+2)$ =

Man soll den Ausdruck

30) $\left[\frac{34+26}{2.(6+4)}-36:(7+2)\right].34+6$ =

31) $(24+26).[2:(3-2)+26:(12+1)]-4$ =

32) $\left[\frac{16+8}{12}+24.(5-3)-36:(14+4)\right]$
$.[24+16:(8-4)-26:(12+1)]$ =

33) Man soll den Ausdruck $3.6+18:6-3$ =
34) = = = = $3.(6+18):6-3$ =
35) = = = = $3.6+18:(6-3)$ =
36) = = = = $3.(6+18):(6-3)$ =
37) = = = = $3.(6+18:6)-3$ =
38) = = = = $3.8+12:4+2$ =
39) = = = = $3.(8+12):4+2$ =
40) = = = = $3.8+12:(4+2)$ =
41) = = = = $3.(8+12:4)+2$ =
42) = = = = $3.(8+12):(4+2)$ =
43) = = = = $3.(8+12:4+2)$ =
44) = = = = $(6+36:2).10$ =
45) = = = = $(6+36):2-10$ =
46) = = = = $24+48:24-20:4+6$ =
47) = = = = $(24+48):24-20:4+6$ =
48) = = = = $24+48:24-20:(4+6)$ =
49) = = = = $(24+48:24-20:(4+6)$ =
50) = = = = $[24+48:(24-20)]:4+6$ =
51) = = = =
$-24+16:(-4)+2+36:(-6)+2$ =

Man soll den Ausdruck

52) $(-24+16):(-4)+2+36:(-6+2)$ =
53) $-24+16:(-4+2)+36:(-6)+2$ =

54) Man soll den Ausdruck $3.(-4)+36:4+8-6$ =
55) = = = = $3.(-4)+36:(4+8-6)$ =
56) = = = = $3.(-4+36:4+8-6)$ =

57) Man soll den Ausdruck $3.[(-4+36):4+8-6]$ berechnen;
58) = = = = $3.[-4+36:(4+8)-6]$ =
59) = = = = $3.[-4+36:(4+8-6)]$ =
60) = = = =
$(-3).(-4)-36:(-4)-8+6$ =

Man soll den Ausdruck
61) $(-3).(-4)-36:(-4-8-6)$ =
62) $(-3).[-4-36:(-4)-8-6]$ =
63) $(-3).[(-4-36):(-4)-8-6]$ =
64) $(-3).[-4-36:(-4-8)-6]$ =
65) $(-3).[-4-36:(-4-8-6)]$ =

66) Man soll den Ausdruck $5.(-8)+3.6-4$ =
67) = = = = $5.(-8+3.6)-4$ =
68) = = = = $5.(-8+3.6-4)$ =
69) = = = = $5.[(-8+3).6-4]$ =
70) = = = = $5.[(-8+3).(6-4)]$ =
71) = = = =
$(-6).(-4)+36:(-4)+2+(-16).3$ =

Man soll den Ausdruck
72) $(-6).(-4)+36:(-4+2)+(-16).3$ =
73) $(-6).(-4+36):(-4)+2+(-16).3$ =
74) $(-6).[-4+36:(-4+2)]+(-16).3$ =

75) Wie müssen in $10+6.12-8:2$ die Klammern angebracht werden, damit die Zahlen 188, 58, 37, 22, 92, 32 und 17 durch Berechnung entstehen?

76) Wie müssen in $3+5.4-2+6:3-1$ die Klammern angebracht werden, damit die Zahlen 10, 14, 17, 18, 19, 22, 24, 27, 28, 31, 32, 33 durch Berechnung entstehen?

77) Man soll den Ausdruck $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}:2-5+\frac{6}{7}$ berechnen;
78) = = = = $(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}):2-5+\frac{6}{7}$ =
79) = = = = $(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}):(2-5)+\frac{6}{7}$ =
80) = = = = $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}:(2-5+\frac{6}{7})$ =

Man soll den Ausdruck
81) $\frac{3}{7}.\frac{14}{25}-\frac{5}{6}:\frac{2}{3}-4+\frac{1}{2}:(-2)$ =
82) $\frac{3}{7}.(\frac{14}{25}-\frac{5}{6}:\frac{2}{3})-4+\frac{1}{2}:(-2)$ =
83) $\frac{3}{7}.(\frac{14}{25}-\frac{5}{6}:\frac{2}{3}-4)+\frac{1}{2}:(-2)$ =
84) $\frac{3}{7}.[(\frac{14}{25}-\frac{5}{6}):\frac{2}{3}-4]+\frac{1}{2}:(-2)$ =
85) $\frac{3}{7}.[(\frac{14}{25}-\frac{5}{6}):(\frac{2}{3}-4)+\frac{1}{2}:(-2)]$ =
86) $\frac{-5}{6}+\frac{7}{8}.\frac{16}{-21}.\frac{5}{11}-2\frac{1}{2}:4+2-\frac{3}{4}$ =
87) $(\frac{-5}{6}+\frac{7}{8}).\frac{16}{-21}.(\frac{5}{11}-2\frac{1}{2}):4+2-\frac{3}{4}$ =
88) $(\frac{-5}{6}+\frac{7}{8}).(\frac{16}{-21}.\frac{5}{11}-2\frac{1}{2}):(4+2)-\frac{3}{4}$ =

Man soll den Ausdruck

89) $\left[\frac{-5}{6}+\frac{7}{8}\cdot\frac{16}{-21}\cdot\left(\frac{5}{11}-2\tfrac{1}{2}\right)\right]:4+2-\frac{3}{4}$ berechnen;

90) $\left[\left(\frac{-5}{6}+\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{16}{-21}\cdot\frac{5}{11}-2\tfrac{1}{2}\right]:\left(4+2-\frac{3}{4}\right)$ =

91) $(-3)\cdot\frac{7}{15}+(-36):4-\frac{2}{3}+36:1+\frac{2}{3}$ =

92) $(-3)\cdot\left[\frac{7}{15}+(-36)\right]:\left(4-\frac{2}{3}\right)+36:1+\frac{2}{3}$ =

93) $(-3)\cdot\frac{7}{15}+(-36):\left(4-\frac{2}{3}\right)+36:\left(1+\frac{2}{3}\right)$ =

94) $\left[(-3)\cdot\frac{7}{15}+(-36)\right]:\left(4-\frac{2}{3}+36\right):1+\frac{2}{3}$ =

95) $(-3)\cdot\left[\frac{7}{15}+(-36):4-\left(\frac{2}{3}+36\right)\right]:\left(1+\frac{2}{3}\right)$ =

96) $(-3)\cdot\frac{7}{15}+(-36):4-\left(\frac{2}{3}+36\right):\left(1+\frac{2}{3}\right)$ =

97) $-\frac{3}{4}:5-2+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}-\frac{1}{2}:(-4)$ =

98) $-\frac{3}{4}:\left(5-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{7}-\frac{1}{2}:(-4)$ =

99) $-\frac{3}{4}:(5-2)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\right):(-4)$ =

100) $-\frac{3}{4}:\left[5-\left(2+\frac{1}{2}\right)\right]\frac{4}{7}-\frac{1}{2}:(-4)$ =

101) $-\frac{3}{4}:5-\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\frac{4}{7}-\frac{1}{2}:(-4)\right]$ =

102) $-\frac{3}{4}:\left(5-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\frac{4}{7}-\frac{1}{2}:(-4)\right]$ =

103) $\left[\left(\frac{3}{35}+\frac{1}{14}\right):\frac{2}{21}-\frac{3}{4}\right]\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{10}$ =

104) $(0{,}035+6{,}32)\cdot 5{,}34-2{,}5$ =

105) $(0{,}035+6{,}32)\cdot(5{,}34-2{,}5)$ =

106) $0{,}035+6{,}32\cdot 5{,}34-2{,}5$ =

107) $0{,}035+6{,}32:(5{,}34-2{,}5)$ =

108) $0{,}000085:0{,}017-2{,}351\cdot 3{,}0005+5{,}3$ =

109) $0{,}000085:0{,}017-2{,}351\cdot(3{,}0005+5{,}3)$ =

110) $8{,}2488+0{,}002382336:0{,}423-2{,}25\cdot 0{,}004$ *) =

111) $0{,}07813124:(2{,}5+1{,}05):5{,}002-2{,}25\cdot 3{,}0051$ =

112) $0{,}0197092148:[3{,}61524+0{,}3324674:(3{,}1-8{,}87)]\cdot 0{,}004$ =

113) $9{,}9005\cdot[(16{,}41+0{,}0965):(3{,}25-9{,}75)]+0{,}004$ =

114) $0{,}03850275:(5{,}0001+2{,}0004)+1{,}68:5{,}6$ =

Resultate.

1) 33; 2) 13; 3) 3; 4) 20; 5) 43; 6) 38; 7) 28; 8) 14; 9) 4; 10) 18; 11) 9; 12) 28; 13) 40; 14) 8; 15) 33; 16) 26; 17) 15; 18) 42; 19) 20; 20) 60; 21) 78; 22) 330; 23) 62; 24) 188; 25) 38; 26) 284; 27) 15; 28) 8; 29) 35; 30) —28; 31) 196; 32) 1248; 33) 18; 34) 9; 35) 24; 36) 24; 37) 24; 38) 29; 39) 17; 40) 26; 41) 35; 42) 10; 43) 39; 44) 240; 45) 11; 46) 27; 47) 4; 48) 24; 49) 1; 50) 15; 51) —30;

---

*) Gehen die Divisionen nicht auf, so werden die Quotienten in 3 Decimalstellen berechnet.

52) —5; **53)** —36; **54)** —1; **55)** —6; **56)** 21; **57)** 30; **58)** —21; **59)** 6; **60)** 19; **61)** 14; **62)** 27; **63)** 12; **64)** 21; **65)** 6; **66)** —26; **67)** 46; **68)** 30; **69)** —170; **70)** —50; **71)** —31; **72)** —42; **73)** 2; **74)** 84; **75)** und **76)** werden nicht hingestellt; **77)** $-3\frac{5}{84}$; **78)** $-3\frac{11}{28}$; **79)** $\frac{5}{14}$; **80)** $\frac{5}{18}$; **81)** $-5\frac{13}{50}$; **82)** $-4\frac{191}{350}$; **83)** $-2\frac{13}{50}$; **84)** $2\frac{7}{50}$; **85)** $-\frac{9}{125}$; **86)** $-\frac{135}{264}$; **87)** $4\frac{41}{154}$; **88)** $-\frac{51211}{66528}$; **89)** $1\frac{101}{264}$; **90)** $-\frac{6970}{14553}$; **91)** $25\frac{3}{5}$; **92)** $68\frac{97}{150}$; **93)** $9\frac{2}{5}$; **94)** $-\frac{503}{1770}$; **95)** $81\frac{9}{25}$; **96)** $-32\frac{2}{5}$; **97)** $-\frac{207}{280}$; **98)** $\frac{1}{392}$; **99)** $-\frac{29}{112}$; **100)** $-\frac{13}{280}$; **101)** $-1\frac{499}{560}$; **102)** $-\frac{117}{784}$; **103)** $\frac{1}{2}$; **104)** 31,4357; **105)** 18,0482; **106)** 31,2838; **107)** 17,9838; **108)** —1,7491755; **109)** —19,5094755; **110)** 8,2448....; **111)** —6,757475....; **112)** 0,00002....; **113)** —25,1333695....; **114)** 0,305....

Drittes Kapitel.

Von den Kettenbrüchen.

Was heißt ein Kettenbruch?

Was versteht man unter den Gliedern eines Kettenbruchs?

Wann heißt ein Kettenbruch m gliedrig?

Was ist ein abgekürzter Kettenbruch?

Was wird ein Partialbruch, Näherungsbruch oder Näherungswerth eines vollständigen Kettenbruchs genannt?

Wie verwandelt man einen gewöhnlichen Bruch in einen Kettenbruch?

Wie wird ein Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt?

Wozu wird die Theorie der Kettenbrüche gebraucht?

Aufgaben.

1) Man soll die Näherungsbrüche von $\frac{431}{729}$ angeben;
2) = = = = = $\frac{7628}{45639}$ =

3) Man soll die Näherungsbrüche von $\frac{5876}{973}$ angeben;
4) = = = = = $\frac{7623}{1128}$ =
5) = = = = = $\frac{529}{1189}$ =
6) = = = = = $\frac{351}{968}$ =
7) = = = = = $\frac{1769}{5587}$ =
8) = = = = = $\frac{907}{18564}$ =
9) = = = = = $\frac{1947}{3859}$ =
10) = = = = = $\frac{587}{1943}$ =
11) = = = = = $\frac{5065}{13891}$ =
12) = = = = = $\frac{5743}{80937}$ =
13) = = = = = $\frac{7147}{18597}$ =
14) = = = = = $\frac{1}{3,14159}$ =
15) = = = = = 0,591 =
16) = = = = = 0,2237 =

Man soll die Kettenbrüche

17) $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$ und $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7}}}$ addiren;

Man soll vom Kettenbruche

18) $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}$ den andern $\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{12}}}$ subtrahiren;

Man soll die Kettenbrüche

19) $\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}}$ und $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{6}}}$ multipliziren;

Man soll den Kettenbruch

20) $\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}$ durch den andern $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3}}}}$ dividiren;

Resultate.

1) $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{22}$, $\frac{81}{137}$, $\frac{175}{296}$; 2) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{59}{353}$, $\frac{414}{2477}$, $\frac{473}{2830}$, $\frac{887}{5307}$, $\frac{2247}{13444}$; 3) 6, $\frac{151}{25}$, $\frac{157}{26}$, $\frac{308}{51}$, $\frac{465}{77}$, $\frac{773}{128}$; 4) 6, 7,

$\frac{27}{4}$, $\frac{34}{5}$, $\frac{95}{14}$, $\frac{129}{19}$, $\frac{224}{33}$, $\frac{1025}{151}$, $\frac{3299}{486}$; 5) $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{13}{28}$, $\frac{98}{211}$, $\frac{111}{239}$, $\frac{209}{450}$; 6) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$; 7) $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{23}{72}$, $\frac{100}{313}$, $\frac{523}{1637}$, $\frac{623}{1950}$; 8) $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{41}$, $\frac{15}{307}$, $\frac{77}{1576}$, $\frac{169}{3459}$, $\frac{246}{5035}$; 9) $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{19}$, $\frac{40}{69}$, $\frac{91}{157}$, $\frac{131}{226}$, $\frac{222}{383}$, $\frac{575}{992}$; 10) $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{13}{43}$, $\frac{29}{96}$, $\frac{100}{331}$, $\frac{129}{427}$, $\frac{229}{758}$; 11) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{31}{85}$, $\frac{35}{96}$, $\frac{66}{181}$, $\frac{101}{277}$, $\frac{268}{735}$, $\frac{369}{1012}$; 12) $\frac{1}{14}$, $\frac{10}{141}$, $\frac{11}{155}$, $\frac{32}{451}$, $\frac{43}{606}$, $\frac{161}{2269}$, $\frac{526}{7413}$, $\frac{1739}{24508}$; 13) $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{19}$, $\frac{31}{59}$, $\frac{41}{78}$, $\frac{646}{1229}$; 14) $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$, $\frac{2931}{9208}$, $\frac{3044}{9563}$, $\frac{24239}{76149}$; 15) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{22}$, $\frac{289}{485}$; 16) $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{15}{67}$, $\frac{17}{76}$, $\frac{185}{827}$, $\frac{217}{970}$;

17)
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

18)
$$\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

19)
$$\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}$$

20)
$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}}}$$

Viertes Kapitel.

Von dem Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren algebraischer Summen.

Wann heißen algebraische Summen addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt?

Wie werden algebraische Summen addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt?

Aufgaben.

Man soll addiren:

1) $\left\{\begin{matrix} 3a - 2b + 5c - 7d, & -5a + 6b - 2c + 8d, \\ -14a - 25b + c + d, & -17a - 2b + 11c - d \end{matrix}\right\}$

2) $\left\{\begin{matrix} -6x + 25y - z + v, & -8x + y - 60z, \\ +8x - y + 2z + 10v, & -10x + 6y - z + 27v \end{matrix}\right\}$ =

3) $\left\{\begin{matrix} -11m + 16n - 3p + q, & -21m + 30n + 8p + 11q, \\ -2m + 8p - 6q, & -m + 28n + 2p - 3q \end{matrix}\right\}$ =

4) $\left\{\begin{matrix} a - 2b + 3c - 2d + 5e, & -2a + b - 8c + 7d - 15e, \\ -7a + 21b - 5c + 11d - 3e, & a - b + c - 8d + 56e, \\ -7a + b - 4c + d + e, & -5a - b - c + 7d - 31e \end{matrix}\right\}$

5) $\left\{\begin{matrix} \frac{2a}{5} - \frac{3b}{7} + \frac{2c}{9} - \frac{d}{10}, & -\frac{4a}{15} + \frac{b}{21} - \frac{5c}{27} + \frac{d}{20} \\ -\frac{a}{3} + \frac{5b}{42} - \frac{c}{3} + \frac{7d}{40}, & -\frac{2a}{45} + \frac{2b}{7} - \frac{7c}{9} + \frac{8d}{5} \end{matrix}\right\}$

6) $\left\{\begin{matrix} -\frac{a}{3} + \frac{2b}{7} + \frac{5c}{9}, & +\frac{2a}{9} - \frac{5b}{21} + \frac{2c}{3}, \\ +\frac{a}{7} - \frac{5b}{56} - \frac{2c}{27}, & -\frac{a}{3} + \frac{2b}{7} - \frac{c}{9}, \\ +\frac{5a}{21} - \frac{3b}{8} - \frac{c}{3}, & +\frac{2a}{27} - \frac{2b}{3} + \frac{4c}{27} \end{matrix}\right\}$

7) $\left\{\begin{matrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{v}{5} + \frac{w}{7}, & -\frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{v}{15} + \frac{w}{21}, \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{27} - \frac{v}{3} + \frac{w}{42}, & +\frac{x}{64} - \frac{y}{81} - \frac{v}{30} + \frac{5w}{42} \end{matrix}\right\}$

8) $\left\{\begin{matrix} \frac{m}{2} - \frac{2n}{7} + \frac{3v}{8} + \frac{w}{9}, & -\frac{2m}{7} + \frac{5n}{21} - \frac{v}{2} + \frac{w}{3}, \\ -\frac{m}{3} + \frac{8n}{21} + \frac{v}{16} - \frac{7w}{27}, & +\frac{8m}{21} - \frac{8n}{7} + \frac{v}{8} - \frac{w}{9} \end{matrix}\right\}$

9) Man soll $6a + 9ab$ in ein Product verwandeln;
10) = = $10ab - 5b$ = = = =
11) = = $a + 2ab + ac$ = = = =
12) = = $ac + bc + 2a + 2b$ = = = =
13) = = $3ac + 3a - c - 1$ = = = =
14) = = $aa + 2ab + bb$ = = = =
15) = = $6aa + 10ab + 18ac + 30bc$ = = = =
16) = = $4aa + 6ab - 2a - 3b$ = = = =
17) = = $6aac + 3ab + 4abcc + 2bbc$ = = = =
18) = = $aaa + 3aab + 3abb + bbb$ = = = =
19) = = $aa + ab - a -$ = = =

Man soll von

20) $-2a+3b-7c+d$, die algebraische Summe
$+7a+21b+5c-18d$ subtrahiren;

21) $-a-b-2c+8d-e$, die algebraische Summe
$+11a-27b-c+d-2e$ subtrahiren;

22) $8x-5y+2z-v$, die algebraische Summe
$-3x+y-10z+8v$ subtrahiren;

23) $x-y+z+3w-5n$, die algebraische Summe
$-8x+2y+5z-2w+8n$ subtrahiren;

24) $8a+28b-7c+11d-25e+6f$, die algebr. Summe
$-7a+20b+28c-d+2e-5g$ subtrahiren;

25) $\frac{2a}{5}-\frac{3b}{7}+\frac{c}{8}-\frac{5d}{9}$, die algebraische Summe
$-\frac{3a}{25}+\frac{b}{21}-\frac{3c}{40}-\frac{d}{3}$ subtrahiren;

26) $\frac{x}{2}-\frac{2y}{3}+\frac{v}{5}-\frac{2w}{7}$, die algebraische Summe
$-\frac{x}{25}-\frac{y}{9}+\frac{2v}{15}+\frac{3w}{49}$ subtrahiren;

27) $\frac{7m}{9}-\frac{2n}{3}+\frac{7p}{8}-\frac{3q}{11}$, die algebraische Summe
$-\frac{5m}{9}+\frac{8n}{21}-\frac{2p}{5}+\frac{5q}{22}$ subtrahiren;

28) $\frac{8a}{7}-\frac{3b}{5}+\frac{d}{7}$, die algebraische Summe
$\frac{2a}{35}+\frac{b}{25}-\frac{6e}{19}$ subtrahiren;

29) $\frac{5v}{8}+\frac{2w}{7}-\frac{4z}{11}$, die algebraische Summe
$\frac{3v}{16}-\frac{5w}{56}+\frac{z}{88}$ subtrahiren.

Man soll

30) $3a+5b-2c$ mit $6a-3b$ multipliciren;
31) $-5x-6y+2z$ mit $3x-4y-6z$ „
32) $5m-n+3v-2w$ mit $m-7n+6v-3w$ „
33) $6a-2b+3c-7d+e$ mit $-a+8b-2c+11d-25e$ „
34) $a-b+c+d$ mit $-a+b-c-d$ „
35) $\frac{m}{2}-\frac{3n}{5}+v$ mit $\frac{2m}{3}-\frac{n}{2}+5v$ „

Man soll

36) $\frac{2a}{3}-\frac{3b}{5}+\frac{c}{7}$ mit $-\frac{a}{4}+\frac{2b}{7}-\frac{c}{8}$ multipliciren;

37) $\frac{a}{2}-\frac{b}{3}+\frac{c}{4}-\frac{d}{5}$ mit $-\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}-\frac{d}{9}$ "

38) $\frac{2x}{5}-\frac{3y}{7}+\frac{2z}{9}-\frac{v}{7}$ mit $-\frac{x}{3}+\frac{y}{9}-\frac{z}{3}+\frac{2v}{9}$ "

39) $\frac{a}{2}-\frac{b}{3}+\frac{5c}{8}-\frac{d}{9}$ mit $-\frac{2a}{3}+\frac{b}{7}-\frac{5c}{7}+\frac{2d}{9}$ "

Man soll

40) $aa+2ab+bb$ durch $a+b$ dividiren;

41) $aa+2ab+bb-cc$ durch $a+b+c$ "

42) $21ll-83lm-27l+22mm+99m$ durch $3l-11m$ "

43) $15aaa-14aab+24abb-7bbb$ durch $3a-b$ "

44) $18aa+33ab+42ac-12ad-30bb+124bc+8bd$
$-16cc-32cd$ durch $6a+15b-2c-4d$ "

45) $119cc-200cd+408ce-113cf-39dd+72de$
$+37df-96ef+20ff$ durch $17c+3d-4f$ "

46) $\frac{5xy}{2}+\frac{85yy}{9}-\frac{223yz}{54}-\frac{10yu}{9}-\frac{3xz}{4}+\frac{7zz}{18}$
$+\frac{uz}{3}$ durch $\frac{3x}{2}+\frac{17y}{3}-\frac{7z}{9}-\frac{2u}{3}$ "

47) $\frac{aa}{bc}-\frac{2a}{d}+\frac{ac}{be}+\frac{bc}{dd}-\frac{cc}{de}$ durch $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ "

48) $\frac{9aabb}{4cc}-\frac{25ffmm}{gg}+\frac{70dfm}{g}$
$-49dd$ durch $\frac{3ab}{2c}+\frac{5fm}{g}-7d$ "

49) $\frac{40xx}{21}-\frac{494xy}{315}+\frac{55xz}{63}+\frac{4yy}{15}-\frac{112yz}{675}-\frac{zz}{15}$
durch $-\frac{5x}{3}+\frac{2y}{5}+\frac{z}{9}$ "

50) $\frac{2aa}{5}-\frac{47ab}{60}+\frac{113ac}{525}+\frac{3bb}{8}-\frac{29bc}{140}+\frac{cc}{35}$
durch $-\frac{3a}{5}+\frac{b}{2}-\frac{c}{7}$ "

51) $-\frac{4aa}{25}+\frac{22ab}{315}-\frac{ac}{3}-\frac{129ad}{40}+\frac{2bb}{63}-\frac{55bc}{189}-\frac{439bd}{504}$
$+\frac{2cc}{3}+\frac{47cd}{12}-\frac{dd}{2}$ durch $-\frac{4a}{5}-\frac{2b}{9}+c-\frac{d}{8}$ "

Man soll

52) $-\frac{vv}{8}-\frac{5vw}{12}+\frac{5vz}{32}-\frac{2ww}{9}+\frac{wz}{6}-\frac{zz}{32}$

durch $-\frac{v}{2}+\frac{w}{3}-\frac{z}{8}$ dividiren;

53) aaaa — bbbb durch a — b .

54) 1 durch 1 — a .

55) c durch a — b .

Man soll den Ausdruck

56) $\frac{2ax+5x-4a-10}{ax+3x-2a-6}$ berechnen;

57) $\frac{ab+3a}{2b+6}$.

58) $\frac{1}{6a+12}+\frac{1}{5a+10}$.

59) $\frac{5}{ab+2bb+3a+6b}+\frac{3}{2ab+4bb+a+2b}$.

60) $\frac{10ab-3bx+10a-3x}{15bx+10abx+30x+20ax}:\left(\frac{2a}{3x+2ax}-\frac{3}{15+10a}\right)$.

61) $\left(\frac{5}{6a+12b}+\frac{2a}{3a+6b+aa+2ab}\right)$
$:\left(\frac{10+12a}{6a+12b+2aa+4ab}-\frac{a}{9a+18b+3aa+6ab}\right)$.

62) $\left[\frac{2aa+abc+2a+bc}{6bc+6b}:\left(\frac{a}{3b}+\frac{c}{6}\right)-\frac{1}{c+1}\right]\cdot\frac{ac+a+c+1}{aa+a}$.

63) $\left(\frac{2x}{xy+2y+3x+6}+\frac{x}{xy+2y+x+2}\right):\frac{3y+5}{yy+4y+3}+\frac{x+4}{x+2}$.

64) $\frac{6a-3b-2aa+ab}{9a-3c-3aa+ac}$.

65) $\frac{6ab-2b-9a+3}{4ab-6b-6a+9}-\frac{6ab-15b-8a+20}{9ab-6b-12a+8}$.

66) $\frac{aa+8a+15}{aa+7a+10}-\frac{a-1}{a+2}$.

67) $\frac{3ab+3a}{ab+3b+a+3}-\frac{2ab+6a}{ab+2b+3a+6}$.

Resultate.

1) $-33a-23b+15c+d$; 2) $-16x+31y-60z+38v$; 3) $7m+74n+15p+39$; 4) $-19a+19b-14c+16d+13e$; 5) $-\frac{11a}{45}+\frac{b}{42}-\frac{29c}{27}+\frac{69d}{40}$; 6) $\frac{2a}{189}-\frac{67b}{84}+\frac{23c}{27}$; 7) $\frac{91x}{192}+\frac{38y}{81}-\frac{v}{2}+\frac{w}{3}$; 8) $\frac{11m}{42}-\frac{17n}{21}+\frac{v}{16}+\frac{2w}{27}$; 9) $(2+3b).3a$; 10) $(2a-1).5b$; 11) $(1+2b+c).a$; 12) $(a+b).(c+2)$; 13) $(3a-1).(c+1)$; 14) $(a+b).(a+b)$; 15) $2.(3a+5b)(a+3c)$; 16) $(2a+3b).(2a-1)$; 17) $(2ac+b).(3a+2bc)$; 18) $(a+b).(a+b).(a+b)$; 19) $(a-1).(a+b)$; 20) $-9a-18b-12c+19d$; 21) $-12a+26b-c+7d+e$; 22) $11x-6y+12z-9v$; 23) $9x-3y-4z+5w-13n$; 24) $15a+8b-35c+12d-27e+6f+5g$; 25) $\frac{13a}{25}-\frac{10b}{21}+\frac{c}{5}-\frac{2d}{9}$; 26) $\frac{27x}{50}-\frac{5y}{9}+\frac{v}{15}-\frac{17w}{49}$; 27) $\frac{4m}{3}-\frac{22n}{21}+\frac{51p}{40}-\frac{q}{2}$; 28) $\frac{38a}{35}-\frac{16b}{25}+\frac{d}{7}+\frac{6e}{19}$; 29) $\frac{7v}{16}+\frac{3w}{8}-\frac{3z}{8}$; 30) $18aa+21ab-12ac-15bb+6bc$; 31) $-15xx+2xy+36xz+24yy+28yx-12zz$; 32) $5mm-36mn+33mv-17mw+7nn-27nv+17nw+18vv-21vw+6ww$; 33) $-6aa+50ab-15ac+73ad-151ae-16bb+28bc-78bd+38be-6cc+47cd-77ce-77dd+186de-25ee$; 34) $-aa+2ab-2ac-2ad-bb+2bc+2bd-cc-2cd-dd$; 35) $\frac{mm}{3}-\frac{13mn}{20}+\frac{19mv}{6}+\frac{3nn}{10}-\frac{7nv}{2}+5vv$; 36) $-\frac{aa}{6}+\frac{143ab}{420}-\frac{5ac}{42}-\frac{6bb}{35}+\frac{227bc}{1960}-\frac{cc}{56}$; 37) $-\frac{aa}{12}+\frac{8ab}{63}+\frac{ac}{48}-\frac{ad}{45}-\frac{bb}{21}-\frac{bc}{168}+\frac{8bd}{945}+\frac{cc}{32}-\frac{19cd}{360}+\frac{dd}{45}$; 38) $-\frac{2xx}{15}+\frac{143xy}{315}-\frac{28xz}{135}+\frac{43xv}{315}-\frac{yy}{3}+\frac{179yz}{567}-\frac{13yv}{63}-\frac{2zz}{27}+\frac{55zv}{567}-\frac{2vv}{63}$; 39) $-\frac{aa}{3}+\frac{37ab}{126}-\frac{65ac}{84}+\frac{5ad}{27}-\frac{bb}{21}+\frac{55bc}{168}-\frac{17bd}{189}-\frac{25cc}{56}+\frac{55cd}{252}-\frac{2dd}{81}$; 40) $a+b$; 41) $a+b-c$; 42) $7l-2m-9$;

43) $5aa-3ab+7bb$; 44) $3a-2b+8c$; 45) $7c-13d+24e-5f$; 46) $\frac{5y}{3}-\frac{z}{2}$; 47) $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}+\frac{c}{e}$; 48) $\frac{3ab}{2c}-\frac{5fm}{g}+7d$; 49) $-\frac{8x}{7}+\frac{2y}{3}-\frac{3z}{5}$; 50) $-\frac{2a}{3}+\frac{3b}{4}-\frac{c}{5}$; 51) $\frac{a}{5}-\frac{b}{7}+\frac{2c}{3}+4d$; 52) $\frac{v}{4}-\frac{2w}{3}+\frac{z}{4}$; 53) $aaa+aab+abb+bbb$; 54) $1+a+aa+aaa+\ldots$; 55) $\frac{c}{a}+\frac{bc}{aa}+\frac{bbbc}{aaaa}+\ldots$;
56) $\frac{2a+5}{a+3}$ *); 57) $\frac{a}{2}$; 58) $\frac{11}{30(a+2)}$;
59) $\frac{13b+14}{(a+2b).(b+3).(2b+1)}$; 60) $\frac{b+1}{b+2}$; 61) $\frac{1}{2}$; 62) 1;
63) 2; 64) $\frac{2a-b}{3a-c}$; 65) $\frac{5aa+7a-13}{6aa-13a+6}$; 66) $\frac{4}{a+2}$;
67) $\frac{aa}{(a+3).(a+2)}$.

Fünftes Kapitel.

Von den Potenzen und Wurzeln.

Was heißt eine ganze und was eine Differenz-Potenz?

Was nennt man Dignand und Exponent?

Was versteht man unter einer ganzen und was unter einer Differenz-Potenz?

Wie viele Bedeutungen hat eine ganze und wie viele eine Differenz-Potenz?

Was heißt Quadrat, Kubus oder Biquadrat?

Was ist eine ganze Wurzel?

---

*) Kurze Auflösung. Es ist $\frac{2ax+5x-4a-10}{ax+3x-2a-6}=\frac{(2a+5).x-(2a+5).2}{(a+3).x-(a+3).2}=\frac{(2a+5).(x+2)}{(a+3).(x+2)}=\frac{2a+5}{a+3}$.

Was nennt man Radikand, Wurzelexponent und Wurzelzeichen?

Was versteht man unter einer ganzen Wurzel?

Wie viele Bedeutungen hat die ganze Wurzel?

Was heißt eine Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzel?

Was heißt eine reelle Potenz?

Was versteht man unter derselben?

Formeln.

1) $a^m = a.a.a....$ m mal, wenn a ein beliebiger Ausdruck und m eine ganze Zahl und >1 ist;
2) Ist $a=b$ so folgt $a^m = b^m$, wenn alle Potenzen reelle sind;
3) Ist $a=b$ und $c=d$, so ergiebt sich $a^c = b^d$ *);
4) Ist $a=b$ und $c=d$, „ „ „ $c^a = d^b$;
5) $a^{m+1} = a^m.a$;
6) $a^{m+n} = a^m.a^n$;
7) $a^{m+n+v} = a^m.a^n.a^v$;
8) $a^{m+n+v+w+\cdots} = a^m.a^n.a^v.a^w....$;
9) $a^{m-n} = \frac{a}{a^n}$;
10) $(ab)^m = a^m.b^m$;
11) $(abc)^m = a^m.b^m.c^m$;
12) $(abcd....)^m = a^m.b^m.c^m.d^m....$;
13) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;
14) $(a^m)^n = a^{mn}$;
15) $[(a^m)^n]^v = a^{mnv}$;
16) Ist $a>b$, so folgt $a^m > b^m$; wenn a und b entweder ganze oder gebrochene positive Zahlen sind, und m eine positiv ganze Zahl ist;
17) $(+a)^m = +a^m$, wenn m eine ganze Zahl ist;
18) $(-a)^{2n} = +a^{2n}$, wenn 2n jede gerade Zahl ausdrückt;
19) $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$, wenn 2n+1 jede ungerade Zahl bezeichnet;
20) $a^1 = a$, wenn a nicht o ist,
21) $1^1 = 1$;
22) $a^o = 1$;

*) Ist bei einer Gleichung nichts besonderes bemerkt, so kommen lauter reelle Potenzen und ganze Wurzeln darin vor.

23) $1^0 = 1$;
24) $1^m = 1$;
25) $0^m = 0$, wenn $m > 1$ ist;
26) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, wenn a nicht o ist;
27) Ist $a:b = c:d$, so folgt $a^m : b^m = c^m : d^m$;
28) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$;
29) $\sqrt[m]{a^m} = a$;
30) Ist $a = b$, so folgt $\left\{\begin{matrix} \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b} \\ \sqrt[a]{m} = \sqrt[b]{m} \end{matrix}\right\}$;
31) Ist $a = b$ und $c = d$, so erhält man $\left\{\begin{matrix} \sqrt[c]{a} = \sqrt[d]{b} \\ \sqrt[a]{c} = \sqrt[b]{d} \end{matrix}\right\}$;
32) Ist $a^m = b^m$, so folgt $a = b$, wenn lauter ganze Potenzen vorkommen.
33) $a \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m \cdot b}$;
34) $\sqrt[m]{a} \cdot b = \sqrt[m]{a \cdot b^m}$;
35) $a : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m : b}$;
36) $\sqrt[m]{a} : b = \sqrt[m]{a : b^m}$;
37) $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$;
38) $\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$;
39) $\sqrt[m]{abcd \ldots} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \cdot \sqrt[m]{d} \ldots$;
40) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$;
41) $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$;
42) $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$;
43) $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$;
44) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:n]{a}$;
45) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;
46) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[v]{a}}} = \sqrt[mnv]{a}$;

47) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n \cdot b^m}$;

48) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[v]{c} = \sqrt[mnv]{a^{nv} \cdot b^{mv} \cdot c^{mn}}$;

49) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[v]{c} \cdot \sqrt[w]{d} \ldots = \sqrt[mnvw\ldots]{a^{nvw\ldots} \cdot b^{mvw\ldots} \cdot c^{mnw\ldots} \cdot d^{mnv\ldots} \ldots}$;

50) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} := \sqrt[mn]{a^n : b^m}$;

51) $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$;

52) $\sqrt[mn]{a^{pn}} = \sqrt[m]{a^p}$;

53) $\sqrt[m:n]{a^{p:n}} = \sqrt[m]{a^p}$;

54) $\sqrt[m]{1} = 1$;

55) $\sqrt[m]{0} = 0$;

56) Ist $a:b = c:d$, so folgt $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

Sechstes Kapitel.

Von einigen Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln.

Wie werden die mit Potenzen und Wurzeln versehenen algebraischen Summen addirt, subtrahirt, multiplizirt und dividirt?

Wie verwandelt man einen mit negativen Exponenten versehenen Ausdruck in einen ihm gleichen, welcher lauter positive Exponenten enthält?

Auf welche Weise wird ein Wurzelausdruck in einen ihm gleichen Potenzausdruck und umgekehrt verwandelt?

Wie wird ein mit Wurzeln versehener Ausdruck in einen ihm gleichen verwandelt, welcher in seinem Divisor keine Wurzelzeichen enthält?

Formeln.

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
5) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;
6) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$;
7) $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$;
8) $(a+\sqrt{b}).(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$;
9) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}).(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$;
10) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}).(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}) = (\sqrt[3]{a})^2 - (\sqrt[3]{b})^2 = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}$.

Aufgaben.

Man soll addiren

1) $5a^5b^7 - 2a^3x^5y + 3m^nx^v$, $\quad -15a^5b^7 + na^3x^5y + 8m^n$ $-3a^5b^7 + wa^3x^5y - 2m^nx^v$, $13a^5b^7 + a^3x^5y - 2m^nx$.

2) $7a^{-4}b^{-3}c + 8d^5e^4 - 2f^3g^2$, $2a^{-4}b^{-3}c - 3d^5e^4 + xf^3g^2$, $-3a^{-4}b^{-3}c + 2d^5e^4 + 2f^3g^2$, $\quad -4a^{-4}b^{-3}c + 2d^5e^4 - 8f^3g^2$.

3) $x^m - 3y^n + 5v^{w+x}$, $cx^m + ay^nb - 3v^{w+x}$, $-3x^m + 2y^n - bv^{w+x}$, $dx^m - 3y^nb + 2v^{w+x}$.

4) $\sqrt{5} - 3\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[5]{8}$, $2\sqrt{5} - 8\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[5]{8}$, $-2\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[5]{8}$, $3\sqrt{5} - 11\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{8}$.

5) $16\sqrt[4]{a^3b^2} - 2\sqrt[3]{a^m} + x\sqrt[n]{c^md^v}$, $\quad 3\sqrt[4]{a^3b^2} + x\sqrt[3]{a^m} + z\sqrt[n]{c^md^v}$, $-3\sqrt[4]{a^3b^2} + \sqrt[3]{a^m} - l\sqrt[n]{c^md^v}$, $-3\sqrt[4]{a^3b^2} + \sqrt[3]{a^m} - 2\sqrt[n]{c^md^v}$.

6) $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c}$, $2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c}$, $x\sqrt{a} - y\sqrt[3]{b} + 9\sqrt[4]{c}$, $2\sqrt{a} - \sqrt[3]{b} + 8\sqrt[4]{c}$, $\frac{2}{3}\sqrt{a} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{b} + \frac{2}{9}\sqrt[4]{c}$, $5\sqrt{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c}$.

Man soll von

7) $5a^4 - 2a^3b^2c + d^5e^4f^2 - gh$ die algebraische Summe $-xa^4 - 9a^3b^2c + 5d^5e^4f^2 + gh^2$ subtrahiren.

8) $5a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}} - 2a^nx^v + 7d^xy^5 - c^2d^2$ die algebraische Summe $9a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}} - la^nx^v + 3d^xy^5 - 5c^2d^2$ subtrahiren.

9) $5\sqrt[m]{a} - 3\sqrt{b} - c\sqrt[n]{d} + v\sqrt{w}$ die algebraische Summe $2\sqrt[m]{a} + x\sqrt{b} - w\sqrt[n]{d} + z\sqrt{w}$ subtrahiren.

10) $3\sqrt{a} - 5\sqrt[5]{a^2bc^3} + 3\sqrt[6]{x^2y^5} + 8a^{\frac{2}{5}}$ die algebraische Summe $\sqrt{a} - 3\sqrt[5]{a^2bc^3} + 8\sqrt[6]{x^2y^5} - \frac{5}{3}a^{\frac{2}{5}}$ subtrahiren.

Man soll

11) $2a - \frac{3b}{4} + \frac{3c}{2}$ mit $\frac{5a}{2} - \frac{2b}{3}$ multipliren;

12) $3a^3 - 2a^2b + ab^2 - 3b^3$ mit $2a^2 - 3ab - b^2$ „

13) $\frac{2a^2}{b^2} - \frac{2ab}{c^2} + p$ mit $\frac{3p^2}{q} - \frac{3b}{c} - \frac{2}{3p} - 1$ „

14) $7a^3 - 5a^2b + 6ab^2 - 2b^3$ mit $3a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2$ „

15) $2a^4x^{2-3}b^4y^2$ mit $2a^4x^2 + 3b^4y^2$ „

16) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
mit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ „

17) $15a^{-6}b^2 - 7a^{-5}b^4 + 6a^{-4}b^6$ mit $8a^{-2}b^2 - 3a^{-1}b^4$ „

18) $3x^{-2}y^{-7} - 2x^2y^{-5} + 8x^6y^{-3}$
mit $2x^{-3}y^{-5} + 6xy^{-3} + 12x^5y^{-1}$ „

19) $\frac{a^2}{b^3} + \frac{2c^3d^4}{b^5} - \frac{7c^2}{2a^4b^3}$ mit $\frac{a^2}{b^3} - \frac{2c^3d^4}{b^5} + \frac{7c^2}{2a^4b^3}$ „

20) $2a^{3-2m}b^{n+3} + 3a^{m+1}b^{n+2} + c^p$ mit $a^{m-1}b^{1-2m} - ca^p$ „

21) $3a^{4-3m}bc^{m-2} + 17a^{-3}b^{m+1}$ mit $3a^{6m-2}b^{2m}c^{3-4m} - 8$ „

22) $\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{10}$ mit $2\sqrt{5}$ „

23) $\sqrt{6} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{5}$ mit $\sqrt{3}$ „

24) $7 + 2\sqrt{6}$ mit $9 - 5\sqrt{6}$ „

25) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ „ $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ „

26) $3\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$ mit $5\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{2}{7}}$ „

27) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{6} - 2$ mit $2\sqrt{5} + 18\sqrt{6}$ „

28) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6}$ mit $2 + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{12}$ „

29) $2\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ mit $2 + \sqrt[3]{9}$ „

30) $2\sqrt{a} + 3c\sqrt[3]{b}$ mit $\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b}$ „

31) $3\sqrt[n]{2 + 4\sqrt[3]{3}}$ mit $4\sqrt[n]{6 + 2\sqrt[3]{9}}$ „

32) $a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{2}{5}}$ mit $a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{2}{5}}$ „

33) $3a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b$ mit $a^{\frac{1}{3}} - 7a^{-\frac{2}{3}}b$ „

Man soll

34) $\frac{5}{3}a^{-7}b^3c$ durch $\frac{1}{2}a^{-9}b^{-5}c^3f$ dividiren;

35) $\frac{2x^{3n-5m}y^{2n-3}}{7a^mb^3c}$ durch $\frac{4x^{1-5m}}{3ab^{n-1}y^5}$ „

36) $a^7 - 6a^6b^3 + 14a^5b^6 - 12a^4b^9$ durch $a^3 - 2a^2b^3$ „

37) $a^8 - 16z^8$ durch $a^2 - 2z^2$ „

38) $2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4$ d. $2a^2 - 3ab + 4b^2$ „

39) $4c^4 - 9b^2c^2 + 6b^3c - b^4$ durch $2c^2 - 3bc + b^2$ „

40) $5a^5b^3c^5 - 22a^4b^3c^6 + 5a^3b^3c^7 + 12a^2b^3c^8 - 7a^2b^2c^8$
$+ 28ab^2c^9$ durch $a^2bc^2 - 4abc^3$ „

Man soll

41) $a^6 + 2a^3z^3 + z^6$ durch $a^2 - az + z^2$ dividiren;

42) $a^6 - 16a^3x^3 + 64x^6$ durch $a^2 - 4ax + 4x^2$ =

43) $-2a^{-8}x^5 + 17a^{-4}x^6 - 5x^7 - 24a^4x^8$ durch $2a^{-3}x^3 - 3ax^4$ =

44) $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5$
$+ 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$ durch $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ =

45) $120a^{-8}b^4 - 101a^{-7}b^6 + 69a^{-6}b^8 - 18a^{-5}b^{10}$
durch $8a^{-2}b^2 - 3a^{-1}b^4$ =

46) $6x^{-5}y^{-12} + 14x^{-1}y^{-10} + 40x^3y^{-8} + 24x^7y^{-6}$
$+ 96x^{11}y^{-4}$ durch $2x^{-3}y^{-5} + 6xy^{-3} + 12x^5y^{-1}$ =

47) $\frac{3x^5}{4} - 4x^4 + \frac{77x^3}{8} - \frac{43x^2}{4} - \frac{33x}{4} + 27$

durch $\frac{x^2}{2} - x + 3$ =

48) $\frac{a^7b^2}{5} - \frac{47a^6b^3}{40} + \frac{9a^5b^4}{2} - 12a^4b^5$

durch $\frac{2a^3b^2}{5} - \frac{3a^2b^3}{4} + 6ab^4$ =

49) $\frac{a^3c}{b^5} + \frac{a^4c}{b^4} - \frac{7a^5c}{b^3} - \frac{3a^6c}{b^2} + \frac{a^2c^3}{b^2} - \frac{2a^3c^3}{b} - a^4c^3$

durch $\frac{a}{b^3} + \frac{3a^2}{b^2} + c^2$ =

50) $\frac{a^4}{b^6} - \frac{4c^6d^8}{b^{10}} + \frac{14c^5d^4}{a^4b^8} - \frac{49c^4}{4a^8b^6}$

durch $\frac{a^2}{b^3} - \frac{2c^3d^4}{b^5} + \frac{7c^2}{2a^4b^3}$ =

51) $2a^{2m} + 2a^mb^p - 4a^mc^n - 3a^mb - 3b^{p+1} + 6bc^n$
durch $2a^m - 3b$ =

52) $2a^{2-m} + b^{n-2m+4} + 3a^{2m}b^{n-2m+3} + a^{m-1}b^{1-2m}c^p$
$- 2ca^{p-2m+3}b^{n+3} - 3ca^{p+m+1}b^{n+2} - a^pc^{p+1}$
durch $a^{m-1}b^{1-2m} - ca^p$ =

53) $a^2x^{q-3p} + 8a^{m+2}x^{q-2p} + 3a^{2m+2}x^{q-p} - 56a^{3m+2}x^q$
$+ 20a^{4m+2}x^{q+p}$ durch $a^2x^q + 5a^{m+2}x^{q+p} - 2a^{2m+2}x^{q+2p}$ =

54) $a^{3m-2n}b^{2p}c - a^{2m+n-1}b^{1-p}c^n + a^{-n}b^{-1}c^m + a^{3m-n}b^{3p+2}c^n$
$- a^{2m+2n-1}b^3c^{2n-1} + b^{p+1}c^{m+n-1}$ durch $a^{-n}b^{-p-1} + bc^{n-1}$ =

55) $a^n - b^n$ durch $a - b$ =

56) $a^{2n} - b^{2n}$ durch $a + b$ =

57) $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ durch $a + b$ =

58) $a + z$ durch $b + z$ =

59) $z + a$ = $z + b$ =

60) $a - z$ = $b - z$ =

61) $z + a$ = $z - b$ =

Man soll

62) $a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}}$ durch $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}$ dividiren;

63) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{4}} - ca^{\frac{7}{10}}b^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}ab^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}ca^{\frac{13}{15}}b^{\frac{5}{6}}$ durch $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ =

64) $a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}$ durch $a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}$ =

65) $\sqrt{6} + 4\sqrt{18} - 3 - 8\sqrt{2}$ durch $\sqrt{3}$ =

66) $3\sqrt{15} - \sqrt{20} + \sqrt{10} - 7$ durch $2\sqrt{5}$ =

67) $6 + 2\sqrt{3} - \sqrt[3]{18}$ durch $\sqrt{6}$ =

68) $\sqrt{8} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[4]{2}$ durch $2\sqrt{2}$ =

Man soll den Ausdruck

69) $\frac{2a}{3b} - \frac{2a - 3b}{2bc} - \frac{a - b + c}{4bc^2}$ berechnen;

70) $\frac{a^3}{(a-b)^3} - \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{b}{a-b}$ =

71) $cf + \frac{a^2}{c^5 f} - \frac{a - b - c^2}{bc^5 f^3}$ =

72) $\frac{f+g}{3f-2g} - \frac{5f-2g}{2f-9g}$ =

73) $\frac{3a+2x}{a+x} - \frac{5a-x}{a-x} + \frac{a}{2x}$ =

74) $\frac{2ax+x^2}{(a-x)^2} - \frac{a^2+5ax}{(a+x)^2} - \frac{x}{a-x}$ =

75) $\frac{3}{4(1-x)^2} + \frac{3}{8(1-x)} + \frac{1}{8(1+x)} - \frac{1-x}{4(1+x^2)}$ =

76) $\frac{a^m}{(a+b)^n} + \frac{a^{m-2}b^r}{(a+b)^{n-1}} - \frac{a^{m-3}b^r}{(a+b)^{n-2}}$ =

77) $\sqrt{ax} + \frac{ax}{a - \sqrt{ax}}$ =

78) $\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} + \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} + \frac{a\sqrt{ax^3+x^4}}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}$ =

79) $\frac{1 + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2}}$ =

Man soll folgenden Quotienten in einen ihm gleichen dadurch verwandeln, daß man Dividend und Divisor durch den nämlichen Ausdruck dividirt:

80) $\frac{a^2 - ab}{2ax - a^3}$;

Man soll folgende Quotienten in die ihnen gleiche dadurch verwandeln, daß man Dividend und Divisor durch den nämlichen Ausdruck dividirt:

81) $\frac{14a^2 - 7ab}{10ac - 5bc}$;

82) $\frac{12a^3x^4 + 2a^2x^5}{18ab^2x + 3b^2x^2}$

83) $\frac{14a^4b^3 - 10a^3b^4 + 6a^2b^5}{7a^2b^2cd^2 - 5ab^3cd^2 + 3b^4cd^2}$;

84) $\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1}$;

85) $\frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}$;

86) $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - ac^2 - bc^2}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$;

87) $\frac{10a^{m+n}cd^{n+2} - 14a^nb^mcd^{n+2}}{25a^{n+2}b^2c^nd - 35a^{n-m+2}b^{m+2}c^nd}$;

88) $\frac{ax^m - bx^{m+1}}{a^2bx - b^3x^3}$;

89) $\frac{2a^{n+r}b^{m-1}c - 4a^rb^{2m-1}c^2d + 2a^{r+1}b^mc + 6a^{r-1}b^{m-1}c^n}{8a^{r+5}b^{m+2}c^2 - 2a^{r+3}b^mc + 10a^rb^3c^4}$;

Man soll den Ausdruck

90) $(\frac{2}{3})^5 . (\frac{3}{7})^8 . (\frac{49}{40})^4 . (\frac{100}{9})^2$ berechnen.

Man soll die Quotienten

91) $\frac{13^2 : (\frac{15}{11})^3}{143^2 : 30^3}$ berechnen;

92) $\left[\frac{5}{(\frac{4}{3})^3} + \frac{3:8^2}{\frac{1}{5}}\right] : \frac{15^2}{2^5}$ "

93) $\left[(\frac{3}{5})^3 : (\frac{9}{20})^2 - \frac{7^2 : 225}{49 : 15}\right] : (\frac{1}{2})^2$ "

94) $\frac{13013^4}{143^3 . 91^5}$ "

95) Man soll den Ausdruck $[(a^3bc^2)^5]^6$ berechnen;

96) " " " " $(a^{-2}b^3c^{-5}f^{-6}x^{1})^{-3}$ "

97) " " " " $\left(\frac{a^2b^{2n-1}cd^{2p-3}}{f^3g^{p-2}h^{3p-2}}\right)^4$ "

98) " " " " $[(-a)^{-3}]^{-5}$ "

99) " " " " $[(-a)^{-4}]^{-6}$ "

100) " " " " $(a^mb^{-n}c^pd)^r$ "

101) Man soll den Ausdruck $\left(\frac{a^m b^n c^p d^{-q}}{f^n g^{-m}}\right)^{-1}$ berechnen;

102) " " " " $\left(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{3}}\right)$ "

103) " " " " $\left(a^2 b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ "

Man soll folgende mit negativen Exponenten versehene Ausdrücke in ihnen gleiche und mit positiven Exponenten versehene verwandeln:

104) $\frac{x^{-2} b^{-5}}{m^{-n} d^{-3}}$;

105) $\frac{m^{-2} b^{-3} c^5}{v^{-5} d^{-10} e^5}$;

106) $\frac{a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{5}{6}} d^{-\frac{7}{8}}}{f^{-\frac{5}{9}} g^{-\frac{2}{7}}}$;

107) $a^{-\frac{5}{7}} . b^2 . c^{-\frac{3}{4}}$;

Man soll jeden folgenden Wurzelausdruck in einen ihm gleichen Potenzausdruck verwandeln:

108) $\sqrt[5]{a^2 bc}$;

109) $\sqrt[6]{\frac{a^5 b^7}{c^{12}}}$

110) $\frac{\sqrt{c+d}}{\sqrt[3]{c^5}}$

111) $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a . \sqrt[3]{a+x}}}$.

Man soll von folgenden beiden Potenzausdrücken jeden in einen ihm gleichen Wurzelausdruck verwandeln:

112) $(c^2 - y^2)^{\frac{17}{20}}$;

113) $a^{\frac{1}{2}} . (a+x)^{\frac{1}{3}}$.

Man soll folgende Ausdrücke in ihnen gleiche verwandeln, deren Divisoren keine Wurzelzeichen enthalten:

114) $\frac{a}{\sqrt{b}}$;

115) $3 : (1 + \sqrt{2})$;

116) $12 : (5 - \sqrt{21})$;

117) $7 : (\sqrt{8} - 2)$;

Man soll folgende Ausdrücke in ihnen gleiche verwandeln, deren Divisoren keine Wurzelzeichen enthalten:

118) $\sqrt{3}:(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})$;

119) $(6-3\sqrt{5}):(\sqrt{5}-1)$;

120) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}):(2\sqrt{5}-\sqrt{18})$;

121) $7:(\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3})$;

122) $(2-\sqrt{3}):(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

123) $(156+12\sqrt{11}):(6+14\sqrt{2}-2\sqrt{11})$;

124) $\sqrt{a}:(b+\sqrt{c})$;

125) $\sqrt{a}:(\sqrt{b}+\sqrt{c})$;

126) $1:(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$;

127) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$;

128) $1:\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})}$;

129) $\left[\sqrt{\frac{a^2-ab-a+b}{a-1}}+\sqrt{\frac{ac-bc+ad-bd}{c+d}}\right]\cdot\frac{5}{2\sqrt{a-b}}$.

Resultate.

1) $(w+n-1)a^3x^5y+7m^nx^v$; 2) $2a^{-4}b^{-3}c+9d^5e^4+(x-8)f^3g^2$; 3) $(c+d-2)x^m+(a-4)y^nb+(4-b)v^{w+x}$; 4) $4\sqrt{5}-19\sqrt[3]{x}+4\sqrt[5]{8}$; 5) $13\sqrt[4]{a^3b^2}+y\sqrt[3]{a^m}+(x+z-e-2)\sqrt[n]{c^md^v}$; 6) $\frac{3x+32}{3}\cdot\sqrt{a}-\frac{(6y+29)}{6}\sqrt[3]{b}+\frac{182}{9}\sqrt[4]{c}$; 7) $(x+5)a^4+7a^3b^2c-4d^5e^4f^2-gh(1+gh)$; 8) $-4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}+(l-2)a^nx^v+4d^xy^5+4c^2d^2$; 9) $3\sqrt[m]{a}-(x+3)\sqrt{b}+(w-c)\sqrt[n]{d}+(v-z)\sqrt{w}$; 10) $2\sqrt{a}-2\sqrt[5]{a^2bc^3}-5\sqrt[6]{x^2y^5}+\frac{29}{3}a^{\frac{2}{5}}$; 11) $5a^2-\frac{77ab}{24}+\frac{b^2}{2}-bc+\frac{15ac}{4}$; 12) $6a^5-13a^4b+5a^3b^2-7a^2b^3+8ab^4+3b^5$; 13) $\frac{6a^2p^2}{b^2q}-\frac{6abp^2}{c^2q}+\frac{3p^3}{q}-\frac{6a^2}{bc}+\frac{6ab^2}{c^3}-\frac{3bp}{c}-\frac{4a^2}{3b^2p}+\frac{4ab}{3c^2p}-\frac{2}{3}-\frac{2a^2}{b^2}+\frac{2ab}{c}-p$; 14) $21a^7-43a^6b+150a^5b^2-110a^4b^3+104a^3b^4-32a^2b^5$; 15) $4a^8x^4-9b^8y^4$; 16) $a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$;

17) $120^{-8}b^4 - 101a^{-7}b^6 + 69a^{-6}b^8 - 18a^{-5}b^{10}$; 18) $6x^{-5}y^{-12} + 14x^{-1}y^{-10} + 40x^3y^{-8} + 24x^7y^{-6} + 96x^{11}y^{-4}$; 19) $\frac{a^4}{b^6} - \frac{4c^6d^8}{b^{10}} + \frac{14c^5d^4}{a^4b^8} - \frac{49c^4}{4a^8b^6}$; 20) $2a^{2-m}b^{n-2m+4} + 3a^{2m}b^{n-2m+3} + a^{m-1}b^{1-2m}c^p - 2ca^{p-2m+3}b^{n+3} - 3ca^{p+m+1}b^{n+2} - a^pc^{p+1}$; 21) $9a^{3m+2}b^{2m+1}c^{1-3m} + 51a^{6m-5}b^{3m+1}c^{3-4m} - 24a^{4-3m}bc^{m-2} - 136a^{-3}b^{m+1}$; 22) $10 + 4\sqrt{35} + 6\sqrt{50}$; 23) $\sqrt{18} + \sqrt[6]{108} - 2\sqrt[4]{45}$; 24) $3 - 17\sqrt{6}$; 25) $\sqrt{35} - \sqrt{15} - \sqrt{14} + \sqrt{6}$; 26) $15\sqrt{\frac{5}{12}} - 5\sqrt{\frac{5}{18}} + 3\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{2}{21}}$; 27) $246 + 58\sqrt{30} - 4\sqrt{5} - 36\sqrt{6}$; 28) $30 + 4\sqrt{5} + 150\sqrt{2} - 34\sqrt{6} + 10\sqrt{10} - 40\sqrt{12} - 6\sqrt{60}$; 29) $4\sqrt{3} + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18} + 6\sqrt[6]{3}$; 30) $2a + 12c\sqrt[3]{b^2} + (3c+8)\sqrt[6]{a^3b^2}$; 31) $12\sqrt[n]{3b + 4\sqrt[3]{9} + 24\sqrt[3]{3}}$; 32) $a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{4}{5}}$; 33) $5a^{\frac{25}{12}} - 41a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2$; 34) $\frac{10a^2b^8}{3c^2f}$; 35) $\frac{3b^{n-4}y^{2n+2}x^{3n-1}}{14a^{m-1}c}$; 36) $a^4 - 4a^3b^3 + 6a^2b^6$; 37) $a^6 + 2a^4z^2 + 4a^2z^4 + 8z^6$; 38) $a^2 - 5ab + 6b^2$; 39) $2c^2 + 3bc - b^2$; 40) $5a^3b^2c^3 - 2a^2b^2c^4 - 3ab^2c^5 - 7bc^6$; 41) $a^4 + a^3z + az^3 + z^4$; 42) $a^4 + 4a^3x + 12a^2x^2 + 16ax^3 + 16x^4$; 43) $-a^{-5}x^2 + 7a^{-1}x^3 + 8a^3x^4$; 44) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$; 45) $15a^{-6}b^2 - 7a^{-5}b^4 + 6a^{-4}b^6$; 46) $3x^{-2}y^{-7} - 2x^2y^{-5} + 8x^6y^{-3}$; 47) $\frac{3x^3}{2} - 5x^2 + \frac{x}{4} + 9$; 48) $\frac{a^4}{2} - 2a^3b$; 49) $\frac{a^2c}{b^2} - \frac{2a^3c}{b} - a^4c$; 50) $\frac{a^2}{b^3} + \frac{2c^3d^4}{b^5} - \frac{7c^2}{2a^4b^3}$; 51) $a^m + b^p - 2c^n$; 52) $2a^{3-2m}b^{n+3} + 3a^{m+1}b^{n+2} + c^p$; 53) $x^{-3p} + 3a^mx^{-2p} - 10a^{2m}x^{-p}$; 54) $a^{3m-n}b^{3p+1}c - a^{2m+2n-1}b^2c^n + b^pc^m$; 55) $a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$; 56) $a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - a^{2n-4}b^3 + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}$; 57) $a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}$; 58) $\frac{a}{b} - \frac{(a-b)z}{b^2} + \frac{(a-b)z^2}{b^3} - \frac{(a-b)z^3}{b^4} + \ldots$; 59) $1 + \frac{a-b}{z} - \frac{(a-b).b}{z^2} + \frac{(a-b).b^2}{z^3} - \ldots$; 60) $\frac{a}{b} + \frac{a-b}{b^2}.z + \frac{a-b}{b^3}.z^2$

$+\frac{a-b}{b^4}.z^3+\ldots$; 61) $1+\frac{a+b}{z}+\frac{(a+b).b}{z^2}+\frac{(a+b).b^2}{z^3}+\ldots$;

62) $a^{\frac{5}{2}}-2b^{\frac{3}{4}}$; 63) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}-ca^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$; 64) $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}$;

65) $\sqrt{2}+4\sqrt{6}-\sqrt{3}-8\sqrt{\tfrac{2}{3}}$; 66) $\frac{3}{2}\sqrt{3}-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{49}{5}}$;

67) $\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt[6]{\tfrac{3}{2}}$; 68) $1+\frac{\sqrt[6]{18}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$;

69) $\frac{8ac^2-12ac+18bc-3a+3b-3c}{12bc^2}$ 70) $\frac{a^3-ab^2+b^3}{(a-b)^3}$;

71) $\frac{bc^6f^4+a^2bf^2-a+b+c^2}{bc^5f^3}$; 72) $\frac{9fg-13f^2-13g^2}{6f^2-31fg+18g^2}$;

73) $\frac{a^3-4a^2x-11ax^2-2x^3}{2x(a^2-x^2)}$ 74) $\frac{2x^4+13a^2x^2-2a^3x-a^4}{(a^2-x^2)^2}$;

75) $\frac{1+x+x^2}{1-x-x^4+x^5}$; 76) $\frac{a^m-a^{m-2}b^{r+1}-a^{m-3}b^{r+2}}{(a+b)^n}$; 77) $\frac{a\sqrt{ax}}{a-\sqrt{ax}}$;

78) $\frac{c\sqrt{ax-x^2}+(ax+d).\sqrt{ax+x^2}+x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 79) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

80) $\frac{a-b}{2x-a^2}$; 81) $\frac{7a}{5c}$; 82) $\frac{2a^2x^3}{3b^2}$; 83) $\frac{2a^2b}{cd^2}$; 84) $\frac{n-1}{n+1}$;

85) $\frac{a+b+c}{a-b+c}$; 86) $\frac{a+b}{(a-b+c)(b+c-a)}$; 87) $\frac{2a^{m-2}d^{n+1}}{5b^2c^{n-1}}$;

88) $\frac{x^{m-1}}{b(a+bx)}$; 89) $\frac{a^n-2b^mcd+ab+3a^{-1}c^{n-1}}{4a^5b^3c-a^3b+5b^{4-m}c^3}$; 90) $\frac{1}{24}$; 91) 88;

92) $\frac{1}{3}$; 93) 4; 94) $\frac{11}{7}$; 95) $a^{90}b^{30}c^{60}$; 96) $a^6b^{-9}c^{15}f^{-18}x^3$;

97) $\frac{a^8b^{8n-4}c^4d^{8p-12}}{f^{12}g^{4p-8}h^{12p-8}}$; 98) $-a^{15}$; 99) a^{24}; 100) $a^{mr}b^{-nr}c^{pr}d^r$;

101) $\frac{a^{-mr}b^{-nr}c^{-pr}d^{qr}}{f^{-nr}g^{mr}}$; 102) $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{9}}$; 103) $a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{8}}c^{-\frac{1}{10}}$;

104) $\frac{cm^nd^3}{x^2b^5}$; 105) $\frac{c^5v^5d^{10}}{e^5m^2b^3}$; 106) $\frac{b^{\frac{5}{6}}.f^{\frac{5}{9}}.g^{\frac{2}{7}}}{a^{\frac{2}{3}}d^{\frac{7}{8}}}$; 107) $\frac{b^2}{a^{\frac{5}{7}}c^{\frac{3}{4}}}$;

108) $a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}$; 109) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}c^{-2}$; 110) $(c+d)^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{5}{3}}$;

111) $a^{-\frac{1}{2}}(a+x)^{-\frac{1}{3}}.(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; 112) $\sqrt[20]{(c^2-y^2)^{17}}$; 113) $\sqrt{a}.\sqrt[3]{a+x}$; 114) $\frac{a\sqrt{b}}{b}$; 115) $3\sqrt{2}-3$; 116) $15+3\sqrt{21}$;

117) $\frac{7}{2}(\sqrt{2}+1)$; 118) $\sqrt{15}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$; 119) $\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{9}{4}$; 120) $9+\frac{5}{2}\sqrt{10}$; 121) $35\sqrt{10}+77\sqrt{2}+63\sqrt{3}+14\sqrt{60}$; 122) $1+\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{4}\sqrt{6}$; 123) $7\sqrt{2}+\sqrt{11}-3$; 124) $\frac{b\sqrt{a}-\sqrt{ac}}{b^2-c}$;

125) $\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{ac}}{b-c}$; 126) $\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}{a-b}$;

127) $\frac{a+b+2\sqrt{ab}+2\sqrt[4]{a^3b}+2\sqrt[4]{ab^3}}{a-b}$; 128) $\sqrt[n]{\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}}$; 129) 5.

Siebentes Kapitel.

Von den Binomial-Coefficienten.

Was ist ein Binomial-Coefficient?

Was heißt Zeiger und was die ihm zugehörige Zahl?

Was versteht man unter einem Binomial-Coefficienten?

Wie wird ein Binomial-Coefficient berechnet?

Formeln.

1) $a_n = \frac{a.(a-1).(a-2)\ldots.[a-(n-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\ n}$, wenn n eine positiv-ganze Zahl und >1 ist.

2) $a_n = o$, wenn a eine positiv-ganze Zahl und $<n$ ist;

3) $a_n = a_{a-n}$, wenn a eine positiv-ganze Zahl darstellt;

4) $a_n + a_{n-1} = (a+1)_n$ *);

5) $(m+1)_2 = m_2 + m$;

6) $(m+n)_2 = m_2 + mn + n_2$;

7) $(m+n)_3 = m_3 + m_2 . n + m . n_2 + n_3$;

8) $(m+n)_4 = m_4 + m_3 . n + m_2 . n_2 + m . n_3 + n_4$;

9) $(m+n)_5 = m_5 + m_4 . n + m_3 . n_2 + m_2 . n_3 + m . n_4 + n_5$;

10) $(m+n)_x = m_x + m_{x-1} . n + m_{x-2} . n_2 + m_{x-3}\, n_3 + \ldots . m . n_{x-1} + n_x$.

Aufgaben.

1) Man soll den Binomial-Coefficienten 10_4 berechnen;

2) = = = = = 15_3 =

---

*) Ist bei einem Binomial-Coefficienten nichts Besonderes bemerkt, so ist der Zeiger stets eine positiv-ganze Zahl und >1, und die ihm entsprechende Zahl immer reell.

3) Man soll den Binomial-Coefficienten $(-2)_5$ berechnen;
4) = = = = = $(-8)_4$ =
5) = = = = = $(-2)_7$ =
6) = = = = = $(\frac{1}{2})_5$ =
7) = = = = = $(\frac{3}{4})_6$ =
8) = = = = = $(\frac{4}{5})_3$ =
9) = = = = = $(-\frac{1}{5})_2$ =
10) = = = = = $(-\frac{3}{5})_6$ =
11) = = = = = $(3\frac{1}{2})_4$ =
12) = = = = = $(-5\frac{2}{3})_3$ =
13) = = = = = $(0{,}015)_2$ =
14) = = = = = $(3{,}1)_4$ =
15) = = = = = $(-0{,}23)_3$ =
16) = = = = = $(-2{,}3)_4$ =

Resultate.

1) 210; 2) 455; 3) —6; 4) 330; 5) —8; 6) $\frac{7}{256}$; 7) $-\frac{663}{65536}$; 8) $\frac{4}{125}$; 9) $\frac{3}{25}$; 10) $\frac{25116}{78125}$; 11) $\frac{35}{128}$; 12) $48\frac{22}{81}$; 13) —0,007387....; 14) 0,0298....; 15) —10,5144....; 16) 7,207....

Achtes Kapitel.

Was heißt ein Binomium, Trinomium, Quatrinomium und Polynomium?

Was versteht man unter dem binomischen, trinomischen, quatrinomischen und polynomischen Lehrsatze?

Wie wird der allgemeinere binomische Lehrsatz auf ein Binomium angewandt, dessen Exponent ein Ziffer-Ausdruck ist?

Formeln.

1) $$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + m_2a^{m-2}b^2 + m_3a^{m-3}b^3 + \ldots + mab^{m-1} + b^m;$$

2) $$(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b + m_2a^{m-2}b^2 - m_3a^{m-3}b^3 + \ldots \mp mab^{m-1} \pm b^m;$$

wenn m eine beliebige reelle Zahl bezeichnet.

3) $1+m+m_2+m_3+\ldots+m_m=2^m$;

4) $1+2m+(2m)_2+(2m)_3+\ldots+(2m)_m=\frac{2^{2m}+(2m)_m}{2}$;

5) $1+(2m+1)+(2m+1)_2+(2m+1)_3+\ldots+(2m+1)_m=2^{2m}$;

6) $1-m+m_2-m_3+\ldots\pm m_m=0$;

wenn m eine positiv ganze Zahl darstellt.

Aufgaben.

Man soll den Ausdruck

1) $(a+b)^5$ berechnen;

2) $(a+b)^{10}$ "

3) $(1\pm x)^{12}$ "

4) $(5-4x)^4$ "

5) $(\frac{1}{2}x+2y)^7$ "

6) $(a^3+3ab)^9$ "

7) $\left(\frac{2ac}{b^2d}+\frac{1}{4}bc^2d\right)^6$ "

8) $(1\pm e^x)^8$ "

9) $(e^x\pm e^{-x})^2$ "

10) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2$ "

11) $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})^2$ "

12) $(a-b-c-d)^5$ "

13) $(a+b+c+d+f+g)^2$ "

14) $\left(2a-\frac{3b}{2}+\frac{2c}{3b}\right)^4$ "

15) $\left(\frac{2ab^m}{c}-\frac{3c^2}{4a^2b^{2m}}-\frac{2ab^2}{3c}-\frac{5b}{3a}\right)^3$ "

16) $(1-x)^{\frac{2}{3}}$ "

17) $\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$ "

18) $(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}$ "

19) $(a+b)^m+(a-b)^m$ "

20) $(a+b)^m-(a-b)^m$ "

21) Wie viel beträgt das 7te Glied von $(a-b)^{29}$?

22) " " " " 5te " " $(a+b)^{16}$?

23) " " " " 5te " " $(a^2-b^2)^{12}$?

24) " " " " mittelste " " $(a-b)^{16}$?

Resultate.

1) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$; 2) $a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6$

$+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$; 3) $1\pm12x+66x^2\pm220x^3+495x^4\pm792x^5+924x^6\pm792x^7+495x^8\pm220x^9+66x^{10}\pm12x^{11}+x^{12}$; 4) $625-2000x+2400x^2-1280x^3+256x^4$; 5) $\frac{1}{128}x^7+\frac{7}{32}x^6y+\frac{21}{8}x^5y2+\frac{35}{2}x^4y^3+70x^3y^4+168x^2y^5+224xy^6+128y^7$; 6) $a^{27}+27a^{25}b+324a^{23}b^2+2268a^{21}b^3+10206a^{19}b^4+30618a^{17}b^5+61236a^{15}b^6+78732a^{13}b^7+59049a^{11}b^8+19683a^9b^9$; 7) $\frac{64a^6c^6}{b^{12}d^6}+\frac{48a^5c^7}{b^9d^4}+\frac{15a^4c^8}{b^6d^2}+\frac{5a^3c^9}{2b^3}+\frac{15}{64}a^2c^{10}d^2+\frac{3}{256}ab^3c^{11}d^4+\frac{1}{4096}b^6c^{12}d^6$; 8) $1\pm8e^x+28e^{2x}\pm56e^{3x}+70e^{4x}\pm56e^{5x}+28e^{6x}\pm8e^{7x}+e^{8x}$; 9) $e^{2x}\pm2+e^{-2x}$; 10) $a+b\pm2\sqrt{ab}$; 11) $\sqrt[3]{a^2}\pm2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$; 12) $a^5-5a^4b-5a^4c-5a^4d+10a^3b^2+20a^3bc+20a^3bd+10a^3c^2+20a^3cd+10a^3d^2-10a^2b^3-30a^2b^2c-30a^2b^2d-30a^2bc^2-60a^2bcd-30a^2bd^2-10a^2c^3-30a^2c^2d-30a^2cd^2-10a^2d^3+5ab^4+20ab^3c+20ab^3d+30ab^2c^2+60ab^2cd+30ab^2d^2+20abc^3+60abc^2d+60abcd^2+20abd^3+5ac^4+20ac^3d+30ac^2d^2+20acd^3+5ad^4-b^5-5b^4c-5b^4d-10b^3c^2-20b^3cd-10b^3d^2-10b^2c^3-30b^2c^2d-30b^2cd^2-10b^2d^3-5bc^4-20bc^3d-30bc^2d^2-20bcd^3-5bd^4-c^5-5c^4d-10c^3d^2-10c^2d^3-5cd^4-d^5$; 13) $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+d^2+2af+2bf+2cf+2df+f^2+2ag+2bg+2cg+2dg+2fg+g^2$; 14) $16a^4-48a^3b+54a^2b^2-27ab^3+\frac{81}{16}b^4+\frac{64a^3c}{36}-48a^2c+36abc-\frac{9b^2c}{4}+\frac{32a^2c^2}{3b^2}-\frac{16ac^2}{b}+6c^2+\frac{64ac^3}{27b^3}-\frac{16c^3}{9b^2}+\frac{16c^4}{81b^4}$; 15) $\frac{8a^3b^{3m}}{c^3}-9+\frac{27c^3}{8a^3b^{3m}}-\frac{27c^6}{64a^6b^{6m}}-\frac{8a^3b^{2m+2}}{c^3}+\frac{6}{b^{m-2}}-\frac{9c^3}{8a^3b^{4m-2}}-\frac{20ab^{2m+1}}{c^2}+\frac{15c}{a^2b^{m-1}}-\frac{45c^4}{16a^5b^{4m-1}}+\frac{8a^3b^{m+4}}{3c^3}+\frac{40ab^{m+3}}{3c^2}+\frac{50b^{m+2}}{3ac}-\frac{1}{b^{2m-1}}-\frac{5c}{a^2b^{2m-3}}-\frac{25c^2}{4a^4b^{2m-2}}-\frac{8a^3b^6}{27c^3}-\frac{20ab^5}{9c^2}-\frac{50b^4}{9ac}-\frac{125b^3}{27a^3}$; 16) $1-\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{81}x^3-\frac{7}{243}x^4-\frac{14}{729}x^5-\frac{91}{6561}x^6-\ldots$; 17) $1-x+\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{3}x^3+\frac{55}{24}x^4-\frac{79}{24}x^5+\frac{1309}{288}x^6-\ldots$; 18) $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+\frac{3}{128}x^4+\frac{15}{256}x^5-\frac{57}{1024}x^6+\ldots$; 19) $2.[a^m+m_2a^{m-2}b^2+m_4a^{m-4}b^4+m_6a^{m-6}b^6+\ldots]$; 20) $2.[ma^{m-1}b+m_3a^{m-3}b^3+m_5a^{m-5}b^5+m_7a^{m-7}b^7+\ldots]$; 21) $29_6a^{23}b^6=475020a^{23}b^6$; 22) $1820a^{12}b^4$; 23) $495a^{16}b^8$; 24) $12870a^8b^8$.

Neuntes Kapitel.

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Zahlen- und Buchstabenausdrücken.

Was versteht man unter dem Ausziehen einer Quadratwurzel?

Was heißt eine rationale und was eine irrationale Quadratwurzel?

Was nennt man die nächst kleinere und was die nächst größere Quadratwurzel aus irgend einem Ausdrucke?

Wie wird die Quadratwurzel aus einem Zahlen- und aus einem Buchstabenausdrucke ermittelt; und welche abgekürzte Verfahrungsarten finden hierbei statt?

Wie wird der Näherungswerth einer irrationalen Quadratwurzel gefunden?

Welche Proben finden beim Ausziehen der Quadratwurzeln statt?

Aufgaben.

Man soll die Quadratwurzel aus

1) 256 ermitteln;
2) 3969 „
3) 1024 „
4) 4096 „
5) 5625 „
6) 2796 „
7) 61009 „
8) 582169 „
9) 956484 „
10) 64985 „
11) 298417 „
12) 57198969 „
13) 68492176 „
14) 25836889 „
15) 71216721 „

Man soll die Quadratwurzel aus

16)	8844676	ermitteln;
17)	8000000	=
18)	236144689	=
19)	1607448649	=
20)	1420913025	=
21)	285970396644	=
22)	38331766225	=
23)	48303584206084	=
24)	12088868379025	=
25)	1258030473956302557306348421792456452620131272 3856	=

Man soll die Quadratwurzel aus

26)	5	in	5	Dezimalstellen	ziehen;
27)	2	=	3	=	=
28)	3	=	3	=	=
29)	13	=	4	=	=
30)	101	=	3	=	=
31)	7	=	3	=	=
32)	7,65	=	5	=	=
33)	9,6	=	4	=	=
34)	0,056	=	5	=	=
35)	0,00789	=	4	=	=
36)	0,014	=	3	=	=
37)	0,000318	=	5	=	=
38)	$\frac{64}{81}$	=	5	=	=
39)	$\frac{1}{2}$	=	3	=	=
40)	$\frac{1}{3}$	=	3	=	=
41)	$\frac{7}{8}$	=	5	=	=
42)	$\frac{5}{12}$	=	4	=	=
43)	$\frac{1}{17}$	=	5	=	=
44)	$\frac{7}{4}$	=	3	=	=
45)	$\frac{5}{3}$	=	5	=	=
46)	$11\frac{11}{16}$	=	5	=	=
47)	$7\frac{13}{36}$	=	5	=	=

48)	$9a^4b^2f^{-12}g^{-8n}$	ermitteln;
49)	$\frac{4}{25}c^6x^{2m+4}y^{4p-8}$	=
50)	$x^2 + 2x + 1$	=
51)	$f^6 + 6f^3x^4 + 9x^8$	=
52)	$a^2x^4 - 4abx^2 + 4b^2$	=
53)	$\frac{9a^8}{4} + 2a^4n^3 + \frac{4n^6}{9}$	=
54)	$\frac{25a^2b^6}{4c^8} + \frac{35ab^3}{c} + 49c^6$	=

Man soll die Quadratwurzel aus

55) $\frac{a^2}{4b^2} - \frac{4a}{3c} + \frac{16b^2}{9c^2}$ ziehen;

56) $a^{2m} - 4a^{m+n} + 4a^{2n}$ „

57) $9x^2 - 30ax - 3a^2x + 25a^2 + 5a^3 + \frac{a^4}{4}$ „

58) $9a^2 - 6ab + 30ac + 6ad + b^2 - 10bc$
$- 2bd + 25c^2 + 10cd + d^2$ „

59) $\frac{4}{9}a^2x^4 - \frac{4}{3}abx^2z + \frac{8}{3}a^2bx^2z^2 + b^2x^2z^2$
$- 4ab^2xz^3 + 4a^2b^2z^4$ „

60) $\frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{4x^2 - 4x + 1}$ „

61) $\frac{a^2x^2 + 2ab^2x^3 + b^4x^4}{a^{2m} + 2a^mx^n + x^{2n}}$ „

Man soll die Quadratwurzel aus folgenden Ausdrücken ziehen:

62) $a^{2m}x^{2n} + 10ca^{2m-2}x^{2n+1} - 6a^{m+1}x^{n-1} + 25c^2a^{2m-4}x^{2n+2}$
$- 30ca^{m-1}x^n + \frac{9a^2}{x^2}$;

63) $\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^6p} - \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}} - \frac{2^8a^{m-1}b^xc}{d^{3p}} + a^{2n}b^{4n-2}d^6$
$+ \frac{2^9}{3}a^nb^{x+2n-1}d^3 + \frac{2^{16}b^{2x}}{9}$;

64) $\frac{4a^{2m-2}b^4}{9c^{4p}} + \frac{16a^2b^{2n-4}}{d^{2p-2}} + \frac{b^{2n}}{9c^6d^4} - \frac{16a^mb^n}{3c^{2p}d^{p-1}}$
$- \frac{4a^{m-1}b^{n+2}}{9c^{2p+3}d^2} + \frac{8ab^{2n-2}}{3c^3d^{p+1}}$

65) $a^2 - x^2$;

66) $a^2 + x^2$;

67) $1 - x$;

68) $1 + x$;

Man soll folgende Ausdrücke in kürzere verwandeln:

69) $2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} + 5\sqrt{72} - \sqrt{50}$;

70) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$;

71) $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}}$;

72) $\sqrt{45c^3} - \sqrt{80c^3} + \sqrt{5a^2c}$;

73) $\sqrt{a^2c + a^2d}$;

74) $\sqrt{\frac{a^3b^2}{cd^2} - \frac{2a^2b^3}{c^2d}}$;

75) $\sqrt{4a^5b^2 - 20a^3b^3 + 25ab^4}$;

76) $\sqrt{\frac{x^3+2x^2+x}{a^3+a^2b}}$;

Man soll jeden der folgenden Ausdrücke in eine Wurzel verwandeln:

77) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$;

78) $(x+1)\sqrt{\frac{f^2g}{x^2-1}}$.

Resultate.

1) 16; 2) 63; 3) 32; 4) 64; 5) 75; 6) 52 und Rest 92; 7) 247; 8) 763; 9) 978; 10) 254 und Rest 469; 11) 546 und Rest 301; 12) 7563; 13) 8276; 14) 5083; 15) 8439; 16) 2974; 17) 2828 und Rest 2416; 18) 15367; 19) 40093; 20) 37695; 21) 534762; 22) 195785; 23) 6950078; 24) 3476905; 25) 35468725293648523749823l6; 26) 2,23606....; 27) 1,414....; 28) 1,732....; 29) 3,6055....; 30) 10,049....; 31) 2,645....; 32) 2,76586....; 33) 3,0983....; 34) 0,23664....; 35) 0,0888....; 36) 0,118....; 37) 0,1783....; 38) $\frac{8}{9}$; 39) 0,707....; 40) 0,577....; 41) 0,93541....; 42) 0,6454....; 43) 0,24253....; 44) 1,322....; 45) 1,29099....; 46) 3,41869....; 47) 2,71313....; 48) $3a^2bf^{-6}g^{-4n}$; 49) $\frac{2}{5}c^3x^{m+2}y^{2p-4}$; 50) $x+1$; 51) f^3+3x^4; 52) ax^2-2b; 53) $\frac{3a^4}{2}+\frac{2n^3}{3}$; 54) $\frac{5ab^3}{2c^4}+7c^3$; 55) $\frac{a}{2b}-\frac{4b}{3c}$; 56) a^m-2a^n; 57) $3x-5a-\frac{a^2}{2}$; 58) $3a-b+5c+d$; 59) $\frac{2}{3}ax^2-bxz+2abz^2$; 60) $\frac{a+2b}{2x-1}$; 61) $\frac{ax+b^2x^2}{a^m+x^n}$; 62) $a^mx^n+5ca^{m-2}x^{n+1}-\frac{3a}{x}$; 63) $\frac{2a^{m-1}c}{2d^{3p}}-a^nb^{2n-1}d^3-\frac{2^8b^x}{3}$; 64) $\frac{2a^{m-1}b^2}{3c^{2p}}-\frac{4ab^{n-2}}{d^{p-1}}-\frac{b^n}{3c^3d^2}$; 65) $a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\ldots$; 66) $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\ldots$;

67) $1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\ldots$; 68) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\ldots$; 69) $8\sqrt{2}$; 70) $-13\sqrt{3}$; 71) $\frac{28}{15}\sqrt{15}$;
72) $(a-c)\sqrt{5c}$; 73) $a\sqrt{c+d}$; 74) $\frac{ab}{cd}\sqrt{ac-2bd}$;
75) $(2a^2-5b)\sqrt{ab^2}$; 76) $\frac{x+1}{a}\sqrt{\frac{x}{a+b}}$; 77) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$;
78) $\sqrt{\frac{(x+1)f^2g}{x-1}}$.

Zehntes Kapitel.

Von den allgemeinen Quadratwurzeln und von den imaginären Wurzeln.

Was nennt man eine allgemeine Quadratwurzel, und was versteht man unter einer solchen Wurzel?

Wie viele Bedeutungen hat jede allgemeine Quadratwurzel, und wie wird die letztere dargestellt?

Was heißt eine imaginäre Wurzel, und was versteht man unter einer solchen Wurzel?

Wie viele Bedeutungen besitzt die imaginäre Wurzel, und wie wird die letztere ausgedrückt?

Formeln.

1) $(\sqrt{a})^2=a$;
2) $\sqrt{(a^2)}=a$;
3) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$;
4) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a}:\sqrt{b}$;
5) $a.\sqrt{b}=\sqrt{a.b^2}$;
6) $a:\sqrt{b}=\sqrt{a^2:b}$;
7) $\sqrt{a:b}=\sqrt{a:b^2}$;

8) $\sqrt{a^n} = a^{n:2}$;
9) $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$;
10) Ist $a = b$, so folgt $\sqrt{a} = \sqrt{b}$;
11) Ist $m + n\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1}$, so folgt $m = p$ und $n = q$, wenn m, n, p und q reelle Zahlen sind;
12) $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$;
13) $\sqrt{A \pm B\sqrt{-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2}}$
$\pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2}} \,.\, \sqrt{-1}$.

Aufgaben.

1) Man soll $a + b\sqrt{-1}$ und $c - d\sqrt{-1}$ addiren.
2) Man soll von $a - b\sqrt{-1}$ den Ausdruck $c - d\sqrt{-1}$ subtrahiren.
3) Man soll den Ausdruck $3\sqrt{-9} + 2\sqrt{-25} - 7\sqrt{-4}$ berechnen;
4) = = = = $2\sqrt{-48} + 3\sqrt{-12} + 5\sqrt{-8} - 7\sqrt{-32}$ =
5) = = = = $\alpha\sqrt{-a}$ mit $\beta.\sqrt{-b}$ multipliciren;
6) = = = = $c\sqrt{-a} + d\sqrt{-b} + f$ mit $\sqrt{-a}$ =
7) = = = = $a + b\sqrt{-1}$ mit $c + d\sqrt{-1}$ =
8) = = = = $2 - \sqrt{-3}$ mit $10 - \sqrt{-8}$ =
9) = = = = $3 - \sqrt{-5}$ mit $4 - 2\sqrt{-5}$ =
10) = = = = $2 - 5\sqrt{-3}$ mit $7 - 4\sqrt{-3}$ =
11) = = = = $7 - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}$ mit $1 - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}$ =
12) = = = = $\sqrt{2} - 3\sqrt{-5}$ mit $\sqrt{7} - \sqrt{-3}$ =
13) = = = = $\sqrt{2} - 3\sqrt{5}.\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{7} - \sqrt{3}.\sqrt{-1}$ =
14) = = = = $2\sqrt{-3} - 5\sqrt{-4} - 7\sqrt{-2}$
mit $\sqrt{-7} - 2\sqrt{-1}$ =
15) = = = = $2\sqrt{3}.\sqrt{-1} - 10\sqrt{-1} - 7\sqrt{2}.\sqrt{-1}$
mit $\sqrt{7}.\sqrt{-1} - 2\sqrt{-1}$ =
16) Man soll $(\sqrt{-1})^2$ berechnen;
17) = = $(\sqrt{-1})^3$ =
18) = = $(\sqrt{-1})^4$ =
19) = = $(\sqrt{-1})^5$ =
20) = = $(\sqrt{-1})^6$ =
21) = = $(\sqrt{-1})^7$ =
22) = = $(\sqrt{-1})^{4n}$ =
23) = = $(\sqrt{-1})^{4n+1}$ =

24) Man soll $(\sqrt{-1})^{4n+2}$ berechnen;

25) " " $(\sqrt{-1})^{4n+3}$ "

26) " " $(a+b\sqrt{-1})^2$ "

27) " " $(a+b\sqrt{-1})^3$ "

28) " " $(a+b\sqrt{-1})^4$ "

29) " " $(a-b\sqrt{-1})^4$ "

Man soll den Ausdruck

30) $\frac{a\sqrt{-1}}{b.\sqrt{-1}}$ berechnen;

31) $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ "

32) $\frac{a}{b\sqrt{-1}}$ "

33) $\frac{a}{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}$ "

34) $\frac{6}{1+\sqrt{2}.\sqrt{-1}}$ "

35) $\frac{6}{1+\sqrt{-2}}$ "

36) $\frac{\sqrt{-12}+\sqrt{-6}+\sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}$ "

37) $\frac{2\sqrt{3}.\sqrt{-1}+\sqrt{6}.\sqrt{-1}+3\sqrt{-1}}{\sqrt{3}.\sqrt{-1}}$ "

38) $\frac{3\sqrt{-4}-2\sqrt{-12}+\sqrt{6}-9}{-3.\sqrt{-2}}$ "

39) $\frac{6\sqrt{-1}-4\sqrt{3}.\sqrt{-1}+\sqrt{6}-9}{-3\sqrt{2}.\sqrt{-1}}$ "

40) $\frac{1}{3-2\sqrt{-3}}$ "

41) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}$ "

42) $\left(\frac{1}{a-b\sqrt{-1}}-\frac{1}{a+b\sqrt{-1}}\right).\sqrt{-1}$ "

43) $\frac{1}{a-b\sqrt{-1}}+\frac{1}{a+b\sqrt{-1}}$ "

Man soll den Ausdruck

44) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} + \frac{a-b\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}$ berechnen;

45) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} - \frac{a-b\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}$ =

46) $\frac{a-b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}} + \frac{a-b\sqrt{-1}}{c-d\sqrt{-1}}$ =

47) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}} - \frac{a-b\sqrt{-1}}{c-d\sqrt{-1}}$ =

48) $\sqrt{43-15\sqrt{8}}$ =

49) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$ =

50) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ =

51) $\sqrt{28+5\sqrt{12}}$ =

52) $\sqrt{87-12\sqrt{42}}$ =

53) $\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}$ =

54) $\sqrt{\sqrt{27}+2\sqrt{6}}$ =

55) $\sqrt{3\sqrt{5}+\sqrt{40}}$ =

56) $\sqrt{[a^2+b+2a\sqrt{b}]}$ =

57) $\sqrt{ac^2+bd^2+2cd\sqrt{ab}}$ =

58) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$ =

59) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ =

60) $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{c}{2}\sqrt{a^2-c^2}}$ =

61) $\sqrt{b^2-ab+\frac{a^2}{4}+\sqrt{4ab^3-8a^2b^2+a^3b}}$ =

62) $\sqrt{\frac{3a}{b}+\sqrt{\frac{12a^3c^2}{bd^2}-\frac{4a^4c^4}{d^4}}}$ =

63) $\sqrt{5-12\sqrt{-1}}$ =

64) $\sqrt{7+6\sqrt{-2}}$ =

Man soll den Ausdruck

65) $\sqrt{-8-6\sqrt{-1}}$ berechnen;

66) $\sqrt{2+4\sqrt{-42}}$ „

67) $\sqrt[4]{-1} = \sqrt{0+\sqrt{-1}}$ „

68) $\sqrt{-\sqrt{-1}} = \sqrt{0-\sqrt{-1}}$ „

69) $\sqrt{8\sqrt{-1}}$ „

70) $\sqrt{\frac{2c^2}{d^2}\sqrt{-1}}$ „

71) $\sqrt{\frac{a^2d}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} - 2\sqrt{-d}}$ „

72) $\sqrt{\frac{a^2c}{b^2} - cd + \frac{ac\sqrt{4d}}{b}.\sqrt{-1}}$ „

Resultate.

1) $(a+c)+(b-d)\sqrt{-1}$ *); 2) $(a-c)\pm(d-b)\sqrt{-1} = (a-c)-(b-d)\sqrt{-1}$; 3) $\pm 9\sqrt{-1} \pm 10\sqrt{-1} \mp 14\sqrt{-1} = \pm 5\sqrt{-1}$ **); 4) $\pm 8\sqrt{3}.\sqrt{-1} \pm 6\sqrt{3}.\sqrt{-1} \pm 10\sqrt{2}.\sqrt{-1} \mp 28\sqrt{2}.\sqrt{-1} = (\pm 14\sqrt{3} \mp 18\sqrt{2})\sqrt{-1}$ ***); 5) $\pm \alpha\beta\sqrt{ab}$; 6) $-ac \mp d\sqrt{ab} \pm f\sqrt{-a}$ ****); 7) $(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$; 8) $(2\mp\sqrt{3}.\sqrt{-1}).(10\mp 2\sqrt{2}.\sqrt{-1}) = 20 \pm \sqrt{24} - 10\sqrt{-3} - 2\sqrt{-8}$; 9) $2-10.\sqrt{-5} = 2\mp 10\sqrt{5}.\sqrt{-1}$ †); 10) $-46-43\sqrt{-3} = -46 \mp 43\sqrt{3}.\sqrt{-1}$ ††); 11) $\frac{13}{2} - 8\sqrt{-\frac{1}{2}} = \frac{13}{2} - \sqrt{-32} = \frac{13}{2} \mp 4\sqrt{2}.\sqrt{-1}$; 12) $\sqrt{14}+3\sqrt{15}-3\sqrt{-35}-\sqrt{-6}$ †††); 13) $\sqrt{14} - 3\sqrt{15} - (3\sqrt{35}+\sqrt{6})\sqrt{-1}$ ††††);

---

*) Wenn $\sqrt{-1}$ jedesmal einen und denselben Werth besitzt.

**) Wenn alle obern oder alle untern Zeichen zugleich gelten.

***) Wenn alle obern oder alle untern Zeichen zugleich stattfinden.

****) Wenn $\sqrt{-a}$ in dem ersten und $\sqrt{-a}$ in dem andern Faktoren jedesmal einen und denselben seiner beiden Werthe vorstellt.

†) Wenn $\sqrt{-5}$ jedesmal denselben Werth vorstellt.

††) Wenn $\sqrt{-3}$ stets denselben Werth besitzt.

†††) Wenn alle Wurzeln noch zweideutig sind.

††††) Wenn alle reellen Wurzeln ihre absoluten Werthe vorstellen.

14) $\pm 2\sqrt{21} \pm 5\sqrt{28} \pm 7\sqrt{14} \pm 4\sqrt{3} \mp 20 \mp 14\sqrt{2}$; 15) $-(2\sqrt{3}-10-7\sqrt{2}).(\sqrt{7}-2) = -2\sqrt{21}+10\sqrt{7}+7\sqrt{14}+4\sqrt{3}-20-14\sqrt{2}$ *); 16) -1; 17) $-\sqrt{-1}$; 18) $+1$; 19) $+\sqrt{-1}$; 20) -1; 21) $-\sqrt{-1}$; 22) $+1$; 23) $+\sqrt{-1}$; 24) -1; 25) $-\sqrt{-1}$; 26) $a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}$; 27) $a^3+3a^2b\sqrt{-1}+3a(b\sqrt{-1})^2+(b\sqrt{-1})^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)\sqrt{-1}$; 28) $(a^4+6a^2b^2+b^4)+(4a^3b-4ab^3)\sqrt{-1}$; 29) $(a^4-6a^2b^2+b^4)-(4a^3b-4ab^3)\sqrt{-1}$; 30) $\frac{a}{b}$ **); 31) $-\sqrt{-1}$; 32) $-\frac{a}{b}\sqrt{-1}$; 33) $\mp\sqrt{a}.\sqrt{-1}$;

34) $\frac{6.(1-\sqrt{2}.\sqrt{-1})}{3} = 2-2\sqrt{2}.\sqrt{-1}$ ***);

35) $\frac{6.(1-\sqrt{-2})}{(1+\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2})} = 2-2\sqrt{-2}$ †); 36) $\pm 2 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$; 37) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ††); 38) $\mp\sqrt{2}\pm\frac{2}{3}\sqrt{6}+\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\mp\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{-1}$; 39) $-\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{6}+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{-1}$ †††); 40) $\frac{3+2\sqrt{-3}}{21} = \frac{3\pm 2\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{21}$; 41) $\frac{a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$; 42) $-\frac{2b}{a^2+b^2}$;

43) $\frac{2a}{a^2+b^2}$; 44) $\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$; 45) $\frac{4ab}{a^2+b^2}\sqrt{-1}$;

46) $2.\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$; 47) $2.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}$; 48) $\pm(5-3\sqrt{2})$;

49) $\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; 50) $\pm(\sqrt{2}-1)$; 51) $\pm(5+\sqrt{3})$;

52) $\pm(3\sqrt{7}-2\sqrt{6})$; 53) $\pm(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})$; 54) $\pm(\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{3})$;

55) $\pm(\sqrt[4]{20}+\sqrt[4]{5})$; 56) $\pm(a+\sqrt{b})$; 57) $\pm(c\sqrt{a}+d\sqrt{b})$;

58) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$; 59) $\sqrt{x-1}-1$; 60) $\frac{c+\sqrt{a^2-c^2}}{2}$;

---

*) Wenn alle hier vorkommenden reellen Wurzeln ihre absoluten Werthe ausdrücken.

**) Wenn $\sqrt{-1}$ jedesmal denselben Werth besitzt.

***) Wenn $\sqrt{2}$ stets ihren absoluten Werth bedeutet.

†) Wenn $\sqrt{-2}$ immer denselben ihrer beiden Werthe vorstellt.

††) Wenn alle reellen Wurzeln ihre absoluten Werthe vorstellen.

†††) Sobald alle reellen Wurzeln ihre absoluten Werthe ausdrücken.

61) $\sqrt{ab}+\sqrt{b^2-2ab+\frac{a^2}{4}}$; 62) $\frac{ac}{d}+\sqrt{\frac{3a}{b}-\frac{a^2c^2}{d^2}}$;

63) $\pm(3-2\sqrt{-1})$; 64) $\sqrt{7+6\sqrt{2}.\sqrt{-1}}=\pm(3+\sqrt{2}.\sqrt{-1})$;
65) $\pm(-1+3\sqrt{-1})$; 66) $\pm(\sqrt{14}+2\sqrt{3}.\sqrt{-1})$;
67) $\pm(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1})$; 68) $\pm(\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1})$;
69) $\pm(2+2\sqrt{-1})$; 70) $\pm\left[\frac{c}{d}(1+\sqrt{-1})\right]$;

71) $\pm\left(\frac{a}{b}\sqrt{d}-\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)$; 72) $\pm\sqrt{c}\left(\frac{a}{b}+\sqrt{-d}\right)$.

Elftes Kapitel.

Von der Ausziehung der Kubikwurzeln aus Zahlen- und Buchstaben-Ausdrücken.

Was versteht man unter dem Ausziehen einer Kubikwurzel?

Was heißt eine rationale und was eine irrationale Kubikwurzel?

Welches ist die nächst kleinere und welches die nächst größere Kubikwurzel aus irgend einem Ausdrucke?

Wie wird die Kubikwurzel aus einem Zahlen- und aus einem Buchstaben-Ausdrucke ermittelt, und welche abgekürzte Verfahrungsarten finden hierbei statt?

Wie wird der Näherungswerth einer irrationalen Kubikwurzel gefunden?

Welche Proben finden beim Ausziehen der Kubikwurzeln statt?

A u f g a b e n.

Man soll die Kubikwurzeln aus

1) 12167 ermitteln;
2) 54872 "
3) 85184 "

Man soll die Kubikwurzel aus

4) 970299 ermitteln;
5) 389017 =
6) 91125 =
7) 804357 =
8) 125000 =
9) 658503 =
10) 59319 =
11) 2460375 =
12) 1191016 =
13) 49836032 =
14) 318611987 =
15) 41063625 =
16) 393832837 =
17) 33076161 =
18) 279726264 =
19) 961504803 =
20) 340068392 =
21) 6372783864 =
22) 7256313856 =
23) 111980168000 =
24) 113028882875 =
25) 8108486729 =
26) 496040751296 =
27) 48188806119 =
28) 6321363049 =
29) 47658422665216 =
30) 21515106856797 =
31) 1881676371789154860897069 =
32) 1308551537722713948l088 =

Man soll die Kubikwurzel aus

33) 4 in 3 Decimalstellen ziehen;
34) 5 = 3 = =
35) 12 = 5 = =
36) 82 = 5 = =
37) 267 = 5 = =
38) 687 = 5 = =
39) 110 = 6 = =
40) 5,8 = 4 = =
41) 102,875 = 4 = =
42) 28,25 = 5 = =
43) 58230,605376 ziehen;
44) 312079,650687 =
45) 0,923441335272 =

Man soll die Kubikwurzel aus

46) 0,095711845 in 3 Decimalstellen ziehen;
47) 3,095711845 = 3 = =
48) 0,037 = 7 = =
49) 3,7 = 6 = =
50) $\frac{343}{512}$ =
51) $\frac{729}{125}$ =
52) $465\frac{31}{64}$ =
53) $\frac{5}{6}$ = 5 = =
54) $\frac{5}{14}$ = 5 = =
55) $\frac{1}{2}$ = 3 = =
56) $\frac{1}{3}$ = 3 = =
57) $\frac{1}{4}$ = 3 = =
58) $3\frac{4}{5}$ = 5 = =
59) $15\frac{2}{3}$ = 5 = =
60) $23\frac{7}{8}$ = 3 = =
61) $13\frac{3}{4}$ = 6 = =
62) $4\frac{2}{27}$ = 5 = =

Man soll die Kubikwurzel aus

63) $\frac{27u^9x^{12}(a^2+x^2)^{-6n}}{8b^{-3n}h^9}$ ziehen;

64) $x^3+6x^2+12x+8$ =

65) $8a^3-84a^2x+294ax^2-343x^3$ =

66) $a^{3m}-6a^{2m+1}x^n+12a^{m+2}x^{2n}-8a^3x^{3n}$ =

67) $b^3+\frac{3a^2b^2}{2c^2}x^{-2}+\frac{3a^4b}{4c^4}x^{-4}+\frac{a^6}{8c^6}x^{-6}$ =

68) $8-6x^{3p-1}+\frac{3}{2}x^{6p-2}-\frac{1}{8}x^{9p-3}$ =

69) $a^3-3a^2b+3a^2c+3ab^2-6abc+3ac^2-b^3+3b^2c$
$-3bc^2+c^3$ =

70) $27z^6-54az^5+63a^2z^4-44a^3z^3+21a^4z^2-6a^5z+a^6$ =

71) $8x^6+48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x$
$-27c^6$ =

72) $(a+b)^{6m}x^3+6ca(a+b)^{4m}x^2+12c^2a^{2p}(a+b)^{2m}x$
$+8c^3a^{3p}$ =

73) $\frac{a^3y^3}{b^6c^3}+\frac{3a^2cy^4}{b^4d}-\frac{3a^3y^2}{b^4c^2}+\frac{3ac^5y^5}{b^2d^2}-\frac{6a^2c^2y^3}{b^2d}$
$+\frac{3a^3y}{b^2c}+\frac{c^9y^6}{d^3}-\frac{3ac^6y^4}{d^2}+\frac{3a^2c^3y^2}{d}-a^3$ =

74) $\frac{8a^3b^3}{c^{3m}} - 60a^5b^2c^m - \frac{36a^3b^4}{c^{2m}} + \frac{6ab^3}{c^{2m}} + 150a^7bc^{5m}$
$+ 180a^5b^3c^{2m} - 30a^3b^2c^{2m} + \frac{54a^3b^5}{c^m} - \frac{18ab^4}{c^m}$
$+ \frac{3b^3}{2ac^m} - 125a^9c^{9m} - 225a^7b^2c^{6m} + \frac{75}{2}a^5bc^{6m}$
$- 135a^5b^4c^{3m} + 45a^3b^3c^{3m} - \frac{15}{4}ab^2c^{3m} - 27a^3b^6$
$+ \frac{27}{2}ab^5 - \frac{9b^4}{4a} + \frac{b^3}{8a^3}$ =

75) $a^3 - x^3$ ausziehen;

76) $a^3 + x^3$ =

77) $1 - x$ =

78) $1 + x$ =

Man soll folgende Ausdrücke in ihnen gleiche aber kürzer ausgedrückte verwandeln:

79) $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} + \sqrt{28} + 2\sqrt{63}$;

80) $\sqrt[3]{16a^3b} + \sqrt{4a^2b} - \sqrt{a^2b} - \sqrt[3]{54a^3b}$;

81) $\sqrt[4]{\frac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}} - \sqrt{\frac{a^2cd^2}{be^2}}$;

82) $\sqrt[3]{54a^{m+6}b^3} - \sqrt[3]{16a^{m-3}b^6} + \sqrt[3]{2a^{4m+9}} + \sqrt[3]{2c^3a^m}$;

83) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^3c^3}{27b^3}x^7 - \frac{4a^2c}{3b}x^6 + \frac{2ab}{c}x^5 - \frac{b^3}{c^3}x^4\right)}$;

84) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^3b^4}{c^2} - \frac{16a^4b^3}{c^3}\right)}$;

85) $x . \sqrt[3]{\left(\frac{8a^4}{27b^3} + \frac{16a^3}{27b^2}\right)}$;

86) $\sqrt[3]{\frac{2x^3z - 6x^2yz + 6xy^2z - 2y^3z}{(8x^3 - 4x^2 + 2x - 1)b}}$;

Man soll den Ausdruck

87) $\left(\frac{\sqrt[4]{35^3} . \sqrt[3]{(\frac{2}{3})^2}}{\sqrt[6]{\frac{7}{6}} . \sqrt[12]{210^7}} + \frac{\sqrt[12]{600}}{\sqrt[18]{27^7}}\right) . \frac{\sqrt[6]{5^5}}{\sqrt[12]{\frac{8}{3}}}$ berechnen;

Man soll den Ausdruck

88) $\sqrt[27]{8^4} \cdot \left(\frac{\sqrt[9]{9191}}{\sqrt[18]{8281}}\right)^5 : \frac{\sqrt{\sqrt[9]{1111^{10}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{22^5}}}$ berechnen;

89) $\frac{\sqrt[48]{25^7} \cdot \sqrt[28]{11^{25}} \sqrt[8]{35^3} \sqrt[4]{\sqrt[7]{539^3}} \cdot 1683211}{\sqrt[3]{15^2} \cdot \sqrt[56]{21^{33}}}$.

90) $\frac{\sqrt[14]{25^9} : \sqrt[4]{(\frac{7}{12})^3} \cdot \sqrt{\sqrt[28]{2^{89}}}}{\sqrt[7]{(\frac{5}{6})^2} \cdot \sqrt[8]{98^3} \cdot \sqrt[56]{9^{43}}} - \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{27^2}}{\sqrt[4]{\frac{1}{64}} \cdot \sqrt[25]{243^{16}}}$ =

Resultate.

1) 23; 2) 38; 3) 44; 4) 99; 5) 73; 6) 45; 7) 93; 8) 50; 9) 87; 10) 39; 11) 135; 12) 106; 13) 368; 14) 683; 15) 345; 16) 733; 17) 321; 18) 654; 19) 987; 20) 698; 21) 1854; 22) 1936; 23) 4820; 24) 4835; 25) 2009; 26) 7916; 27) 3639; 28) 1849; 29) 36256; 30) 27813; 31) 123456789; 32) 23564792; 33) 1,587....; 34) 1,709....; 35) 2,28942....; 36) 4,34448....; 37) 6,43927....; 38) 8,82373....; 39) 4,791418....; 40) 1,7967....; 41) 4,6856....; 42) 3,04559....; 43) 38,76; 44) 67,83; 45) 0,9738; 46) 0,457....; 47) 1,457....; 48) 0,3332221....; 49) 1,546686....; 50) $\frac{7}{8}$; 51) $\frac{9}{5}$; 52) $7\frac{3}{4}$; 53) 0,94103....; 54) 0,70949....; 55) 0,793....; 56) 0,693; 57) 0,629....; 58) 1,56049....; 59) 2,50222; 60) 2,879....; 61) 2,395709....; 62) 1,59713....; 63) $\frac{3b^n u^3 x^4}{2h^3(a^2+x^2)^{2n}}$;

64) $x+2$; 65) $2a-7x$; 66) $a^m - 2ax^n$; 67) $b + \frac{a^2}{2c^2}x^{-2}$;

68) $2 - \frac{1}{2}x^{3p-1}$; 69) $a - b + c$; 70) $3z^2 - 2az + a^2$;

71) $2x^2 + 4cx - 3c^2$; 72) $(a+b)^{2m}x + 2ca^p$;

73) $\frac{ay}{b^2c} + \frac{c^3y^2}{d} - a$; 74) $\frac{2ab}{c^m} - 5a^3c^{3m} - 3ab^2 + \frac{b}{2a}$;

75) $a - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} - \frac{5x^9}{81a^8} + \frac{10x^{12}}{243a^{11}} - ....$; 76) $a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} + ...$; 77) $1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81}$

$-\frac{10x^4}{243}-\ldots$; 78) $1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}+\ldots$;

79) $8\sqrt{7}-\sqrt[3]{3}$; 80) $a\sqrt{b}-a\sqrt[3]{2b}$; 81) $\left(\frac{a^2}{b}+\frac{ac}{d}-\frac{ad}{e}\right)\sqrt{\frac{c}{b}}$;

82) $\left(3a^2b-\frac{2b^2}{a}+a^{m+3}+c\right)\sqrt[3]{2a^m}$; 83) $\left(\frac{2ac}{3b}x^2-\frac{b}{c}x\right)\sqrt[3]{x}$;

84) $\frac{2ab}{c}\sqrt[3]{(bc-2a)}$; 85) $\frac{2ax}{3b}\sqrt[3]{(a+2b)}$;

86) $\frac{x-y}{x-1}\sqrt[3]{\frac{2z}{b}}$; 87) $\frac{10}{3}$; 88) 2; 89) 11; 90) $\frac{1}{3}$.

Zwölftes Kapitel.

Von den Bestimmungsgleichungen im Allgemeinen.

Was heißt eine Bestimmungsgleichung und was eine algebraische?

Was versteht man in einer Bestimmungsgleichung unter den unbekannten Buchstaben, unbekannten Zahlen oder Unbekannten; und

wodurch werden dieselben ausgedrückt?

Was nennt man einen Werth des Unbekannten oder ein Resultat der Bestimmungsgleichung?

Was heißt eine Bestimmungsgleichung auflösen, und wann nennt man eine solche Gleichung aus einer andern richtig abgeleitet?

Wie werden die Bestimmungsgleichungen eingetheilt?

Welche Bestimmungsgleichungen werden zu den einfachen algebraischen mit einem Unbekannten, oder zu den Gleichungen des ersten Grades mit einem Unbekannten gezählt?

Welche Bestimmungsgleichung wird eine trans-

scendente Gleichung mit einem Unbekannten genannt?

Was heißt eine quadratische Gleichung oder eine Gleichung vom zweiten Grade mit einem Unbekannten?

Welche algebraische Gleichung wird eine kubische, biquadratische oder eine Gleichung vom dritten und vierten Grade mit einem Unbekannten genannt?

Was nennt man eine Gleichung vom mten Grade mit einem Unbekannten?

Welche Bestimmungsgleichungen heißen höhere, und wie werden die darin vorkommenden Buchstaben genannt?

Was heißt eine reine und was eine unreine höhere Gleichung vom mten Grade?

Was wird eine reducirte Gleichung vom mten Grade genannt?

Was heißt eine algebraische Gleichung mit zwei Unbekannten?

Wie werden die algebraischen Gleichungen mit zwei Unbekannten eingetheilt?

Was nennt man eine transscendente Gleichung mit zwei Unbekannten?

Was heißt eine algebraische Gleichung mit drei oder mehren Unbekannten; und was wird eine transscendente Gleichung mit drei oder mehren Unbekannten genannt?

Wie werden die algebraischen Gleichungen mit drei oder mehren Unbekannten eingetheilt?

Wann heißt eine algebraische Gleichung nach einem oder nach mehren Unbekannten geordnet; und auf welche Weise wird dies bewerkstelligt?

Was wird Algebra genannt?

Lehrsätze.

1) Wenn man auf beiden Seiten einer Gleichung denselben Ausdruck addirt oder subtrahirt, so bringt die neue Gleichung dieselben Resultate wie die ursprüngliche hervor.

Ist nämlich

$$A = B$$

so erhält man $A \pm C = B \pm C$

2) Wenn man in einer Gleichung beliebige (oder alle) Glieder auf der einen Seite wegläßt, und dieselben mit entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen auf die andere Seite bringt, so entsteht eine richtig abgeleitete Gleichung.

3) Wenn man in einer Gleichung die Zeichen aller Glieder umkehrt, so geht eine richtig abgeleitete Gleichung hervor.

4) Wenn man die beiden Seiten einer Gleichung mit einem von dem Unbekannten x ganz unabhängigen Ausdrucke, der nicht Null ist, multiplicirt, so bringt die neue Gleichung dieselben Resultate wie die ursprüngliche hervor.

Multiplicirt man aber beide Seiten mit einem Ausdrucke, welcher x enthält und für gewisse Werthe dieses Buchstaben verschwindet, so enthält die neue Gleichung ebenfalls alle Resultate der ursprünglichen; sie kann aber auch noch Resultate besitzen, welche den Ausdruck, womit multiplicirt worden ist, verschwinden machen, ohne der ursprünglichen Gleichung Genüge zu thun.

5) Wenn man die beiden Seiten einer Gleichung:

$$A = B$$

durch einen von x unabhängigen Ausdruck C, welcher nicht o ist, dividirt, so hat die neue Gleichung:

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$$

die nämlichen Resultate wie die ursprünglichen. Dividirt man aber $A = B$ durch einen Ausdruck c, welcher x enthält und für gewisse Werthe dieses Unbekannten verschwindet; so hat $\frac{A}{c} = \frac{B}{c}$ die nämlichen Resultate wie die ursprüngliche Gleichung. Doch kann $A = B$ auch Resultate enthalten, welche nicht zu denen von $\frac{A}{c} = \frac{B}{c}$ gehören, sondern in der Gleichung $c = o$ enthalten sind.

6) Potenzirt man die beiden Seiten einer Gleichung:

1) $A = B$,

mit der positiv-ganzen Zahl m, so hat die neue Gleichung:

2) $A^m = B^m$,

die nämlichen Resultate wie (1), wenn m ungerade ist.

Ist m aber gerade, so enthält (2) nicht allein alle Resultate von (1), sondern auch noch die der Gleichung

3) $A = -B$.

Jedes Resultat von (2) muß aber deßhalb allemal wenigstens einer der beiden Gleichungen (1) oder (3) angehören.

7) Sind die beiden Seiten der Gleichung

$$1) \quad A = B$$

positive Zahlen, und radizirt man dieselben mit einer positiv ganzen Zahl m, so hat die neue Gleichung

$$2) \quad \sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{B}$$

die nämlichen Resultate wie die ursprüngliche, wenn m ungerade ist.

Ist m aber gerade, so genügt zwar jedes Resultat von (2) auch der (1); man wird jedoch, um die Resultate von (1) vollständig zu erhalten, zu den Resultaten (2) noch sämmtliche Resultate der Gleichung

$$3) \quad \sqrt[m]{A} = -\sqrt[m]{B}$$

zufügen müssen.

Dreizehntes Kapitel.

Von den einfachen algebraischen Gleichungen, oder von den Gleichungen des ersten Grades.

Wie wird eine einfache Gleichung mit einem Unbekannten aufgelöst?

Wie löst man mehrere Gleichungen mit mehren Unbekannten auf?

Was wird eine Eliminationsgleichung genannt?

Wie viel einfache algebraische Gleichungen gehören zu n Unbekannten, damit die letzteren bestimmte Werthe erhalten?

Wie viel Methoden existiren, die Unbekannten zu eliminiren; und wie werden diese Methoden genannt?

Aufgaben.

I. Einfache Gleichungen mit einem Unbekannten.

Man soll

1) $8x - 5 = 13 - 7x$ nach x auflösen;

2) $13 - 2x + 5x = 20 - 4x$ „ „ „

3) $128 - 5x - 7x + 30 = 50 + 15x$ „ „ „

4) $45 + 7x - 18 = 9x - 3 + 4x - x$ „ „ „

5) $10 - \frac{14+x}{5} + \frac{x}{3} = \frac{36-x}{5} + \frac{3x-2}{8}$ „ „ „

6) $5x + \frac{2x-4}{3} - \frac{17-x}{3} = 9 + \frac{7x}{4} + 8 + \frac{5x}{4}$ „ „ „

7) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 7$ „ „ „

8) $2x + \frac{3x+5}{5} = 5 + \frac{10x-8}{2}$ „ „ „

9) $\frac{17-3x}{16} - \frac{5x+3}{9} = \frac{24-x}{7} - 4\frac{1}{2}$ „ „ „

10) $\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} - \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{3x}{8} + 15 = 0$ „ „ „

11) $\frac{6x+18}{13} - 4\frac{5}{6} - \frac{11-3x}{36} = 5x - 48 - \frac{13-x}{12} - \frac{21-2x}{18}$ „ „ „

12) $9 - \frac{3x}{5} + \frac{7x}{10} = \frac{x}{2} - 5$ „ „ „

13) $\frac{5x+4}{2} : \frac{18-x}{4} = 7 : 4$ „ „ „

14) $\frac{(2x+3)^2 - 1}{20} - \frac{3x^2+18}{15} = -\frac{1}{5}$ „ „ „

15) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{x}{4} = \frac{x+6}{2} + 3$ „ „ „

16) $-6\frac{1}{3}x + 158\frac{1}{2} - 10x = -\frac{37x}{6} + 19 + \frac{3x}{8}$ „ „ „

17) $8\frac{3}{4} + \frac{3x}{7} - \frac{5}{6} + 2x - \frac{12x}{5} + 13 + \frac{x}{4} = 0$ „ „ „

18) $-\frac{16x}{7} = -\frac{1}{2}x + 412\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x - 316\frac{1}{2}$ „ „ „

Man soll

19) $\frac{52}{3x} + \frac{19}{60 - 2x} = \frac{2}{x}$ nach x auflösen;

20) $\frac{2x}{2 - x} - \frac{2x + 6x}{2 - 3x} = 2 - \frac{1 - 2x}{2 - x}$ = = =

21) $3{,}05x - \frac{7{,}02x}{4} + 51{,}3 = \frac{10x}{23} + 53{,}28552$ = = =

22) $\frac{3{,}07x}{16} + \frac{x - 0{,}08}{5} = \frac{3x}{8} - 0{,}0079$ = = =

23) $\frac{9x}{5} + 2{,}7 - 8{,}1x = \frac{18x}{5} + 4{,}68$ = = =

24) $13{,}2x - \frac{3x}{4} + 7{,}6953 = \frac{x}{5} + 7834{,}5$ = = =

25) $\frac{7{,}53x}{18} + 100 = \frac{2x}{5} + 3{,}86 - \frac{x}{6}$ = = =

26) $\sqrt{x^2 + 13} = x + 1$ *) = = =

27) $\sqrt{4x^2 - 19} = 2x - 1$ = = =

28) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x + 14} = 9$ = = =

29) $\sqrt{x + 40} = 10 - \sqrt{x}$ = = =

30) $\frac{\sqrt{x} + 28}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sqrt{x} + 38}{\sqrt{x} + 6}$ = = =

31) $\frac{3x}{5}\sqrt{4x^2 + 9} + \frac{6x^2}{5} = \frac{3x}{2}$ = = =

32) $\frac{3x - 1}{\sqrt{3x} + 1} = 1 + \frac{\sqrt{3x} - 1}{2}$ = = =

33) $\sqrt{2 + x} + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{2 + x}}$ = = =

34) $3a + x - 5b + 2 = 7b - a + c + 6$ = = =

35) $\frac{5}{6}ab + \frac{4}{5}ac - \frac{2}{3}cx = \frac{3}{4}ac + 2ab - 6cx$ = = =

36) $\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0$ = = =

37) $\frac{ace}{d} - \frac{(a + b)^2 x}{a} - bx = ac - 3bx$ = = =

---

*) Man bemerke, daß alle in diesem §. vorkommenden Quadratwurzeln nur ihre positiven Werthe ausdrücken.

Man soll

38) $\frac{a+3x}{4a}-\frac{7a-5x}{6b}+3-\frac{9x}{4}=\frac{x}{ab}+\frac{5x}{6b}$ nach x auflösen;

39) $\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}+\frac{e}{fx}+\frac{g}{hx}=k$ = = =

40) $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}$
$=3cx+\frac{bx}{a}$ = = =

41) $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$ = = =

42) $\frac{cx}{c-dx}-\frac{c+bcx}{a-bx}=c-\frac{d-cx}{c-dx}$ = = =

43) $\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}$
$=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$ = = =

44) $\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}+\frac{b}{(2b-a)x}-\frac{3bc+ad}{2abx(a+b)}$
$=\frac{5ab}{3c-d}+\frac{3bc-ad}{2abx(a-b)}$ = = =

45) $5a^3cx+ac^2x-5abc^2-3a^3c^3$
$=5a^2bcx+bc^2x-3a^2bc^3-5a^2c^2$ = = =

46) $\frac{cx^m}{a+bx}=\frac{fx^m}{d+ex}$ = = =

47) $\frac{7x^n}{x-1}=\frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1}-\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}$ = = =

48) $3ab+\frac{(c^2-a^2)bx}{ac^2}=3cx+\frac{bx}{a}-\frac{a^2b^2}{c^3}$ = = =

49) $\sqrt[m]{ax+b}=\sqrt[m]{cx+d}$ = = =

50) $\sqrt[3]{a^2+c}=\sqrt{\frac{a^2+c}{d(x+g)}}$ = = =

51) $\sqrt[m]{a+x}=\sqrt[2m]{x^2+5ax+b^2}$ = = =

52) $c+b\sqrt[m]{x+d}=f$ = = =

Man soll

53) $\frac{ax}{b}\sqrt{f^2x^2+d^2}+\frac{afx^2}{b}=cx$ nach x auflösen;

54) $2\sqrt[4]{\frac{a-n}{c^2x+b}}=\sqrt[3]{\frac{a-n}{c^2x+b}}$

II. Einfache Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Man soll

55) $\left\{\begin{matrix} x+15y=36 \\ y+3x=20 \end{matrix}\right\}$ nach x und y auflösen;

56) $\left\{\begin{matrix} 4x+9y=47 \\ 8x-13y=1 \end{matrix}\right\}$

57) $\left\{\begin{matrix} 4x-3y=5 \\ 2x+5y=10 \end{matrix}\right\}$

58) $\left\{\begin{matrix} 3x-2y=118 \\ x-5y=191 \end{matrix}\right\}$

59) $\left\{\begin{matrix} 12x-5y=140 \\ 3x+7y=101 \end{matrix}\right\}$

60) $\left\{\begin{matrix} x+7y=69 \\ 5x-3y=79 \end{matrix}\right\}$

61) $\left\{\begin{matrix} 3x+2y=118 \\ x+5y=191 \end{matrix}\right\}$

62) $\left\{\begin{matrix} \frac{3x}{4}+\frac{5y}{6}=2\frac{5}{12} \\ \frac{7x}{8}-\frac{2y}{5}=\frac{3}{40} \end{matrix}\right\}$

63) $\left\{\begin{matrix} \frac{x+5}{2}+\frac{y+6}{5}=6 \\ \frac{5x-1}{2}-\frac{2y-1}{3}=\frac{14}{3} \end{matrix}\right\}$

64) $\left\{\begin{matrix} \frac{7x+6}{11}+\frac{4y-9}{3}=3x-\frac{13-x}{2}-\frac{3y-x}{5} \\ (3x+4):(2y-3)=5:3 \end{matrix}\right\}$

65) $\left\{\begin{matrix} \frac{x-2}{5}-\frac{10-x}{3}=\frac{y-10}{4} \\ \frac{2y+4}{3}-\frac{2x+y}{8}=\frac{x+13}{4} \end{matrix}\right\}$

Man soll

66) $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x+30}{y+1} = 5 \\ \dfrac{9x-9}{2y-6} = 6 \end{array} \right\}$ nach x und y auflösen;

67) $\left\{ \begin{array}{l} 113\tfrac{1}{2}x - 27\tfrac{5}{7}y = 10y + 5488\tfrac{4}{7} \\ 9y - 347 = 5x - 420 \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

68) $\left\{ \begin{array}{l} (x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112 \\ 2x + 10 = 3y + 1 \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

69) $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 18,73 \\ 0,56x + 13,421y = 763,4 \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

70) $\left\{ \begin{array}{l} ax = by \\ x + y = c \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

71) $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{b+y} = \dfrac{b}{3a+x} \\ ax + 2by = d \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

72) $\left\{ \begin{array}{l} bcx = cy - 2b \\ b^2y + \dfrac{a(c^3-b^3)}{bc} = \dfrac{2b^3}{c} + c^3x \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

73) $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} : \sqrt{y} = a:b \\ x + y = c \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

74) $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{\sqrt{x}} : \dfrac{b}{\sqrt{y}} = c:d \\ x - y = m \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

75) $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{9x^2+7(x+y)+98} : \sqrt{4x^2+9(x+y)-245} = 3:2 \\ 4x - \dfrac{3y}{5} = 81 \end{array} \right\}$ „

III. Einfache Gleichungen mit drei Unbekannten.

Man soll

76) $\left\{ \begin{array}{l} 7y - 3z = 45 \\ 5x + 3z = 94 \\ 15x - 7z = 74 \end{array} \right\}$ nach x, y und z auflösen;

77) $\left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = 19 \\ 7x + 3z = 76 \\ 5y - 2z = 22 \end{array} \right\}$ „ „ „ „ „

Man soll

78) $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 4x+3y=24 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ nach x, y und z auflösen;

79) $\begin{cases} 2x+3y+4z=20 \\ 5x-2y+6z=19 \\ 7x-3y=1 \end{cases}$ " " " " "

Man soll folgende Gleichungen nach x, y und z auflösen:

80) $\begin{cases} 5x+7y-9z=13 \\ 2x-3y+6z=49 \\ 8x+y-3z=43 \end{cases}$;

81) $\begin{cases} 2x+3y-z=21 \\ 9x-2z=24 \\ 6x+5z=111 \end{cases}$;

82) $\begin{cases} (x+3):(x-3)=(y+2):(y-4) \\ x:z=14:15 \\ (y+5):(z-5)=34:25 \end{cases}$;

83) $\begin{cases} x+y+z=29\frac{1}{4} \\ x+y-z=18\frac{1}{4} \\ x-y+z=13\frac{3}{4} \end{cases}$;

84) $\begin{cases} y+\frac{x}{2}=41 \\ x+\frac{z}{4}=20\frac{1}{2} \\ y+\frac{z}{5}=34 \end{cases}$;

85) $\begin{cases} 2x-\frac{3y}{4}=93-\frac{x}{2}-\frac{y}{4} \\ 7x-5z=y+x-86 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=58 \end{cases}$;

86) $\begin{cases} 18x-7y-5z=11 \\ 4\frac{2}{5}y-\frac{2x}{3}+z=108 \\ 3\frac{1}{2}z+2y+\frac{3x}{4}=80 \end{cases}$;

Man soll folgende Gleichungen nach x, y und z auflösen:

87) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5x+7y}{x+y}=6 \\ \dfrac{3(z-x)}{x-y+z}=1 \\ \dfrac{2x+3y-z}{\dfrac{x}{2}+3}=4 \end{array}\right\}$;

88) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+y}{xy} \\ \dfrac{x^2}{z}(x-2)-2(x+z)=z^2 \\ 2z-x=\dfrac{y}{4} \end{array}\right\}$;

89) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=b \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=c \end{array}\right\}$;

90) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{3y}+\dfrac{1}{z}=3\tfrac{4}{27} \\ \dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=6\tfrac{11}{12} \\ \dfrac{6}{5x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=12\tfrac{4}{45} \end{array}\right\}$;

91) $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{3x+2y+z+8}{6}}:\sqrt{\dfrac{x+2y+3z-20}{3}}=3:4 \\ \dfrac{2x+3y+4z+5}{x+y+z}=\tfrac{46}{15} \\ x:z=17:18 \end{array}\right\}$;

IV. Einfache Gleichungen mit vier und mehren Unbekannten.

Man soll folgende Gleichungen nach x, y, z und u auflösen:

92) $\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+2z-u=40 \\ 5x+4y-3z-2u=76 \\ 6x+y-5z-u=9 \\ x+y+z-u=42 \end{array}\right\}$;

Man soll folgende Gleichung nach x, y, z und w auflösen:

$$93)\ \begin{cases} w + x + y + z = 7 \\ w - x + 2y - z = 6 \\ 3w + 3x - 2y + z = 5 \\ -6w + 5x + 3y - z = 4 \end{cases};$$

Man soll folgende Gleichungen nach x, y, z und u auflösen:

$$94)\ \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 3y + u = 11 \\ 2x + 2z + u = 12 \\ u - x - y = 1 \end{cases};$$

$$95)\ \begin{cases} x - 9y - 3z + 10u = 21 \\ 2x + 7y + z + u = 683 \\ 3x + y - 5z - 2u = 195 \\ 4x - 6y + 2z + 9u = 516 \end{cases};$$

$$96)\ \begin{cases} x + y + z + u = 1 \\ 16x + 8y + 4z + 2u = 9 \\ 81x + 27y + 9z + 3u = 36 \\ 256x + 64y + 16z + 4u = 100 \end{cases};$$

$$97)\ \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58 \\ \frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76 \\ \frac{x}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{u}{5} = 79 \\ y + z + u = 248 \end{cases};$$

Man soll folgende Gleichung nach w, x, y und z auflösen:

$$98)\ \begin{cases} \frac{w}{10} + \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 12 \\ \frac{w}{4} + \frac{y}{9} - \frac{z}{6} = 18 \\ \frac{w}{50} - \frac{x}{4} + \frac{z}{12} = 1 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{16} = 10 \end{cases};$$

Man soll folgende Gleichung nach x, y, z, u und v auflösen:

$$99)\ \begin{cases} x + 2y - z = 7\frac{1}{3} \\ 3y - 2z + v = 7\frac{1}{6} \\ 4z - 3v + 2u = -3\frac{1}{3} \\ 5v - 4u + 3x = 21\frac{1}{2} \\ 6u - 5x + 4y = -7\frac{1}{2} \end{cases};$$

Man soll folgende Gleichung nach x, y, z, u, t, u. w auflösen:

$$100)\quad \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t+u=a \\ x+y+z+t+w=b \\ x+y+z+u+w=c \\ x+y+u+t+w=d \\ x+z+u+t+w=e \\ y+z+u+t+w=f \end{array}\right\}.$$

Resultate.

1) $x=1\frac{1}{5}$; 2) $x=1$; 3) $x=4$; 4) $x=6$; 5) $x=6$;
6) $x=8$; 7) 12; 8) $x=0$; 9) $x=3$; 10) $x=66\frac{2}{3}$;
11) $x=10$; 12) $x=35$; 13) $x=2$; 14) $x=1$; 15) $x=24$;
16) $x=13\frac{59}{253}$; 17) $x=-75\frac{10}{117}$; 18) $x=-80\frac{80}{83}$;
19) $x=78\frac{6}{7}$; 20) $x=3\frac{1}{3}$; 21) $x=2{,}3$; 22) $x=0{,}48$;
23) $x=0{,}2$; 24) $x=638{,}92283\ldots$; 25) $x=-519{,}67567\ldots$;
26) $x=6$; 27) $x=5$; 28) $x=11$; 29) $x=9$; 30) $x=4$;
31) $x=-\frac{11}{40}$; 32) $x=3$; 33) $x=\frac{2}{3}$; 34) $x=12b-4a+c+4$;

35) $x=\frac{(70b-3c).a}{320c}$; 36) $x=\frac{ac(1-3ab)}{c-ad}$;

37) $x=\frac{a^2e(c-d)}{(a^2+b^2).d}$; 38) $x=\frac{39ab-14a^2}{27ab-9b+12}$;

39) $x=\frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfhk}$; 40) $x=\frac{ab}{a+b}$;

41) $x=\frac{ac}{b}$; 42) $x=\frac{(a+1)c^2-ad}{[(a+1)c-e].d}$;

43) $x=\frac{5a(2b-a)}{3c-d}$; 44) $x=\frac{3c-d}{5a(2b-a)}$;

45) $x=\frac{3a^2c^2-5ac}{5a^2+c}$; 46) $x=\frac{cd-af}{bf-ce}=\frac{af-cd}{ce-bf}$;

47) $x=-\frac{11}{12}$; 48) $x=\frac{ab}{c}$; 49) $x=\frac{d-b}{a-c}$;

50) $x=\frac{1}{d\sqrt[3]{a^2+c}}-g$; 51) $x=\frac{a^2-b^2}{3a}$;

52) $x=\left(\frac{f-c}{b}\right)^m-d$; 53) $x=\frac{b^2c^2-a^2d^2}{2abcf}$

$=\frac{(bc+ad)(bc-ad)}{2abcf}$; 54) $\frac{(a-n)-4096b}{4096c^2}$; 55) $x=6, y=2$;
56) $x=5$, $y=3$; 57) $x=\frac{55}{26}$, $y=\frac{15}{13}$; 58) $x=16$, $y=-35$;
59) $x=15$, $y=8$; 60) $x=20$, $y=7$; 61) $x=16$, $y=35$;
62) $x=1$, $y=2$; 63) $x=3$, $y=4$; 64) $x=7$, $y=9$;

65) $x=7,\ y=10$; 66) $x=5,\ y=6$; 67) $x=56,\ y=23$; 68) $x=3,\ y=5$; 69) $x=-39{,}8121\ldots,\ y=58{,}5421\ldots$; 70) $x=\frac{bc}{a+b},\ y=\frac{ac}{a+b}$; 71) $x=\frac{2b^2-6a^2+d}{3a},\ y=\frac{3a^2-b^2+d}{3b}$; 72) $x=\frac{a}{bc},\ y=\frac{a+2b}{c}$; 73) $x=\frac{a^2c}{a^2+b^2},\ y=\frac{b^2c}{a^2+b^2}$; 74) $x=\frac{a^2d^2m}{a^2d^2-b^2c^2},\ y=\frac{b^2c^2m}{a^2d^2-b^2c^2}$;
75) $x=24,\ y=25$; 76) $x=11;\ y=12,\ z=13$;
77) $x=7,\ y=8,\ z=9$; 78) $x=3,\ y=4,\ z=5$;
79) $x=1,\ y=2,\ z=3$; 80) $x=8,\ y=9,\ z=10$;
81) $x=6,\ y=8,\ z=15$; 82) $x=28,\ y=29,\ z=30$;
83) $x=16,\ y=7\frac{3}{4},\ z=5\frac{1}{2}$; 84) $x=18,\ y=32,\ z=10$;
85) $x=48,\ y=54,\ z=64$; 86) $x=12,\ y=25,\ z=6$;
87) $x=8,\ y=8,\ z=12$; 88) $x=5,\ y=4,\ z=3$;
89) $x=\frac{2}{a+b-c},\ y=\frac{2}{a-b+c},\ z=\frac{2}{b+c-a}$;
90) $x=6,\ y=9,\ z=\frac{1}{3}$; 91) $x=34,\ y=35,\ z=36$;
92) $x=21,\ y=22,\ z=23,\ u=24$; 93) $w=2,\ x=\frac{3}{2},\ y=3,\ z=\frac{1}{2}$; 94) $x=1,\ y=2,\ z=3,\ u=4$; 95) $x=100,\ y=60,\ z=13,\ y=50$; 96) $x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{4},\ u=0$; 97) $x=12,\ y=30,\ z=168,\ u=50$; 98) $w=100,\ x=20,\ y=9,\ z=48$; 99) $x=4,\ y=2,\ z=\frac{2}{3},\ u=\frac{3}{4},\ v=\frac{5}{2}$;
100) $x=\frac{S}{5}-f,\ y=\frac{S}{5}-e,\ z=\frac{S}{5}-d,\ u=\frac{S}{5}-c,\ t=\frac{S}{5}-b,\ w=\frac{S}{5}-a$, wenn man $a+b+c+d+e+f$ durch S bezeichnet.

Vierzehntes Kapitel.

Von den quadratischen und höhern Gleichungen.

Wie löst man eine reine quadratische Gleichung mit einem Unbekannten auf?

Wie wird eine unreine quadratische Gleichung mit einem Unbekannten aufgelöst?

Wie werden zwei oder mehrere quadratische Gleichungen nach den darin vorkommenden Unbekannten aufgelöst?

Wie löst man eine reine kubische Gleichung mit einem Unbekannten auf?

Wie viel Bedeutungen hat eine allgemeine Kubikwurzel?

Wie wird die reducirte kubische Gleichung mit einem Unbekannten aufgelöst?

Was heißt die Cardan'sche Regel, und was wird der irreduktible Fall der Cardan'schen Regel genannt?

Wie löst man eine vollständige kubische Gleichung mit einem Unbekannten auf?

Was versteht man unter den Wurzelwerthen einer quadratischen, kubischen oder höhern Gleichung?

Wie wird eine reine biquadratische Gleichung mit einem Unbekannten aufgelöst?

Wie viel Bedeutungen hat jede Biquadratwurzel?

Wie löst man eine reducirte und eine vollständige biquadratische Gleichung auf?

Wie wird eine reine höhere Gleichung vom mten Grade aufgelöst, und wie wird eine numerische, höhere Gleichung näherungsweise berechnet?

Wie viel Bedeutungen kommen der allgemeinen mten Wurzel zu?

Formeln und Lehrsätze.

I. Ist $ax^2 = b$, so folgt $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$;

II. Ist $x^2 + px = q$, so folgt $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$

III. Ist $ax^2 + bx = c$, so folgt $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac + b^2}}{2a}$;

IV. Ist $ax^3 = b$, so folgt $x = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \\ \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \\ \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \end{cases}$;

V. Ist $x^3 + px + q = 0$, so folgt

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

VI. Ist $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, so folgt

$$y^3 + (q - \tfrac{1}{3}p^2)y + [\tfrac{2}{27}p^3 - \tfrac{1}{3}pq + r] = 0,$$

wenn man $x = y - \frac{1}{3}p$ setzt, und hieraus y und somit x nach (5) berechnet.

VII. Ist $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, so folgt $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$, und hieraus x nach (6).

VIII. Ist $ax^4 = b$, so folgt $x = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{b}{a}}.(+1) \text{ *)} \\ \sqrt[4]{\frac{b}{a}}.(-1) \\ \sqrt[4]{\frac{b}{a}}.(\sqrt{-1}) \\ \sqrt[4]{\frac{b}{a}}.(-\sqrt{-1}) \end{cases}$.

IX. Ist $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, so erhält man $x = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta} \\ -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta} \\ -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 - \delta} \\ -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 - \delta} \end{cases}$

wenn man $\alpha + \gamma = 0$, $\beta + \delta + \alpha\gamma = p$, $\alpha\delta + \beta\gamma = q$, $\beta\delta = r$ setzt und aus diesen Gleichungen α, β, γ und δ ermittelt.

---

*) Wenn $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ in allen vier Fällen ihren absoluten Werth besitzt.

X. Ist $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, so setzt man in diese Gleichung $x=y-\frac{1}{4}p$, löst die hierdurch entstandene Formel nach y auf, und berechnet alsdann x.

XI. Ist $ax^m=b$, so folgt $x=\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

XII. Ist $ax^{2m}+bx^m+c=0$, so folgt $x=\sqrt[m]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

XIII. In einer höhern Gleichung vom mten Grade

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+Qx+R=0$$

hat der Unbekannte x jedesmal m Werthe; und zwar enthält der dem 2ten Gliede zugehörige Coefficient A die Summe aller m Werthe mit entgegengesetztem (+ oder —) Zeichen; und das letzte Glied R das Produkt dieser m Werthe mit eignem oder entgegengesetztem (+ oder —) Zeichen, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

XIV. Jede höhere Gleichung vom mten Grade:

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Qx+R=0$$

wird in eine reducirte verwandelt, sobald man für

$$x=z-\frac{1}{m}A$$

in die gegebene Gleichung setzt.

XV. In einer reducirten höhern Gleichung ist die Summe aller Wurzelwerthe $=0$.

XVI. Hat man einen Wurzelwerth, etwa α, der höhern Gleichung vom mten Grade gefunden, so ist der Ausdruck:

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+Qx+R$$

durch $x-\alpha$ theilbar.

Die Differenz $x-\alpha$ ist also in diesem Falle ein Faktor des Ausdrucks: $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+Qx+R$.

XVII. Sind alle Wurzelwerthe einer höhern Gleichung ganze Zahlen, so darf man nur alle Faktoren des letzten Gliedes R aufsuchen und alsdann zusehen: welche dieser Faktoren die gegebene Gleichung zur richtigen machen. Letztere Faktoren sind aber alsdann die gesuchten Wurzelwerthe der höhern Gleichung.

Aufgaben.

A. Reine quadratische Gleichungen mit einem Unbekannten.

Man soll folgende Gleichungen nach x auflösen:

1) $9x^2-3=5+x^2$;

2) $x+\sqrt{7+x^2}=\frac{28}{\sqrt{7+x^2}}$;

Man soll folgende Gleichungen nach x auflösen:

3) $25-10\sqrt{x}=4-x$;

4) $9-6\sqrt{x}=1-x$;

5) $\frac{\sqrt{1+4x^2}+2x}{\sqrt{1+4x^2}-2x}=9$;

6) $\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a^2m}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

7) $\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{x}{b}$;

8) $\sqrt{\frac{a+x}{x}}-\sqrt{\frac{a-x}{x}}=\sqrt{\frac{x}{m}}$;

B. Reine quadratische Gleichungen mit mehren Unbekannten.

Man soll folgende Gleichungen nach x und y auflösen:

9) $\left\{\begin{array}{l} x.y=P \\ \frac{x}{y}=Q \end{array}\right\}$;

10) $\left\{\begin{array}{l} x+y=S \\ x\,.\,y=P \end{array}\right\}$;

11) $\left\{\begin{array}{l} x-y=D \\ x\,.\,y=P \end{array}\right\}$;

12) $\left\{\begin{array}{l} x.y=440 \\ \frac{x}{y}=\frac{10}{11} \end{array}\right\}$;

13) $\left\{\begin{array}{l} x+y=33 \\ x\,.\,y=272 \end{array}\right\}$;

14) $\left\{\begin{array}{l} x-y=13 \\ x\,.\,y=90 \end{array}\right\}$;

15) $\left\{\begin{array}{r} (x+y)^2:(x-y)^2=64:1 \\ x.y=63 \end{array}\right\}$;

16) $\left\{\begin{array}{l} x^2+xy=12 \\ y^2+xy=24 \end{array}\right\}$;

17) $\left\{\begin{array}{l} x+\sqrt{xy}+y=19 \\ x^2+xy+y^2=133 \end{array}\right\}$;

18) $\left\{\begin{array}{l} x^4-y^4=65 \\ x^2-y^2=5 \end{array}\right\}$;

Man soll folgende Gleichungen nach x, y, z auflösen:

19) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=93 \\ xyz=29760 \\ xz=960 \end{array}\right\}$;

20) $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=84 \\ x+y+z=14 \\ xy=8 \end{array}\right\}$.

C. Unreine quadratische Gleichungen mit einem Unbekannten.

Man soll folgende Gleichungen nach x auflösen:

21) $x^2+6x=27$;

22) $x^2+4x=140$;

23) $x^2-6x+8=80$;

24) $x^2-8x+10=19$;

25) $x^2-x-40=170$;

26) $x^2-7x+3\frac{1}{4}=0$;

27) $x^2-5\frac{3}{4}x=18$;

28) $3x^2-2x=65$;

29) $20748-1616x+21x^2=0$;

30) $9\frac{1}{3}x^2-90\frac{1}{3}x+195=0$;

31) $3x^2+x=7$;

32) $6x-30=3x^2$;

33) $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}$;

34) $\frac{48}{x+3}=\frac{165}{x+10}-5$;

35) $\frac{18+x}{6(3-x)}=\frac{20x+9}{19-7x}-\frac{65}{4(3-x)}$;

36) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$;

37) $\frac{x^3-10x^2+1}{x^2-6x+9}=x-3$;

38) $x^{\frac{6}{5}}+x^{\frac{3}{5}}=756$;

39) $x^2-12x+35=0$;

40) $adx-acx^2=bcx-bd$;

41) $abx^2+\frac{3a^2x}{c}=\frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2}-\frac{b^2x}{c}$;

42) $ax^2+b^2+c^2=a^2+2bc+2(b-c)x\sqrt{a}$;

Man soll folgende Gleichungen nach x auflösen:

43) $ax^{2n} + bx^n = c$;

44) $x^4 - 74x^2 = -1225$;

45) $cx + \frac{ac}{a-b} = (a-b)x^2$;

46) $\frac{ax^2 + b^2x - cx}{x+a} = bx - \frac{bc}{x+a}$;

47) $\sqrt[n]{x} + a\sqrt[2n]{x} + b = 0$;

48) $ax^6 + ab = bx^6 + 2ax^3\sqrt{b}$;

49) $x^{10} + a^2 = 2ax^5 + b^2$;

50) $x + 1 = \frac{b}{a^2} + 2\sqrt{x}$;

D. Unreine quadratische Gleichungen mit mehren Unbekannten.

Man soll folgende Gleichungen nach x und y auflösen:

51) $\left\{ \begin{array}{l} x - y = 15 \\ \frac{xy}{2} = y^3 \end{array} \right\}$;

52) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{10x + y}{xy} = 3 \\ 9y - 9x = 18 \end{array} \right\}$;

53) $\left\{ \begin{array}{r} (x+y):(x-y) = 13:5 \\ y^2 + x \ = 25 \end{array} \right\}$;

54) $\left\{ \begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 120 - 2y \\ xy - y^2 = 8 \end{array} \right\}$;

55) $\left\{ \begin{array}{l} xy + x = a \\ xy - y = b \end{array} \right\}$;

56) $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + x + y = a \\ x^2 - y^2 + x - y = b \end{array} \right\}$;

57) $\left\{ \begin{array}{l} x + y \ = 9 \\ x + y^2 = 21 \end{array} \right\}$;

Man soll folgende Gleichung nach x, y und z auflösen:

58) $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ y^2 = 2xz + b \\ cx = dz \end{array} \right\}$;

Man soll folgende Gleichung nach x, y und z auflösen:

59) $\left\{\begin{array}{l} x(y+z)=a \\ y(x+z)=b \\ z(x+y)=c \end{array}\right\}$.

E. Unreine kubische Gleichungen mit einem Unbekannten (nach der Cardan'schen Regel).

Man soll folgende Gleichungen noch x auflösen:

60) $x^3-3x-2=0$;
61) $x^3+12x+63=0$;
62) $x^3-21x+344=0$:
63) $x^3-12x^2+57x-94=0$;
64) $x^3-12x-28=0$;
65) $x^3+6x^2+20x+15=0$;
66) $x^3-15x^2+71x-297=0$;
67) $x^3-12x^2+36x-7=0$.

F. Höhere Gleichungen mit einem Unbekannten (durch das Aufsuchen der rationalen Werthe des Unbekannten).

Man soll folgende Gleichungen nach x auflösen:

68) $x^3-9x^2+26x-24=0$;
69) $x^3-8x^2+5x+14=0$;
70) $x^3-49x-120=0$;
71) $x^3+\frac{17}{4}x^2-\frac{79}{8}x+\frac{15}{4}=0$;
72) $x^3-\frac{14}{3}x^2+7x-\frac{10}{3}=0$;
73) $x^3+\frac{82}{15}x^2-\frac{173}{5}x-\frac{126}{5}=0$;
74) $x^3-14x^2-5x+70=0$;
75) $x^3-13x^2+49x-45=0$;
76) $x^3-6x^2+19x-44=0$;
77) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$;
78) $x^4-45x^2-40x+84=0$;
79) $x^4+29x^3+287x^2+1147x+1560=0$;
80) $x^4-\frac{19}{4}x^3+\frac{49}{8}x^2-\frac{11}{4}x+\frac{3}{8}=0$;
81) $x^4-\frac{41}{8}x^3+\frac{287}{32}x^2-\frac{393}{64}x+\frac{45}{32}=0$;
82) $x^4+x^3-24x^2+43x-21=0$;
83) $x^5-3x^4-8x^3+24x^2-9x+27=0$.

G. Höhere Gleichungen (durch Näherung).

Man soll folgende Gleichungen nach x auflösen:

84) $x^3=2$;
85) $x^3=30$;

Man soll folgende Gleichungen nach x auflösen:

86) $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$;
87) $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$;
88) $x^3 - 12x - 132 = 0$;
89) $x^4 - 4x^3 + 18 = 0$;
90) $x^4 + 8x^2 + 16x - 440 = 0$.

Resultate.

1) $x = \pm 1$; 2) $x = \pm 3$; 3) $x = 9$ und $x = 49$; 4) $x = 4$ und $x = 16$; 5) $x = \pm \frac{2}{3}$; 6) $x = \pm a\sqrt{m-1}$; 7) $x = \pm\sqrt{2ab - b^2}$; 8) $x = \pm 2\sqrt{m(a-m)}$; 9) $x = \pm\sqrt{PQ}$, $y = \pm\sqrt{\frac{P}{Q}}$; 10) $x = \frac{S}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - 4P}$, $y = \frac{S}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - 4P}$; 11) $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4P} + \frac{D}{2}$, $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4P} - \frac{D}{2}$;

12) $x = \pm 20$, $y = \pm 22$; 13) $\left\{\begin{matrix} x = 16, & x = 17 \\ y = 17, & y = 16 \end{matrix}\right\}$;

14) $\left\{\begin{matrix} x = 18, & x = -5 \\ y = 5, & y = -18 \end{matrix}\right\}$; 15) $x = 9$, $y = 7$; 16) $x = 2$, $y = 4$; 17) $x = 9$ und $x = 4$, $y = 4$ und $y = 9$; 18) $x = \pm 3$, $y = \pm 2$; 19) $x = 32$ und $x = 30$, $y = 31$, $z = 30$ und $z = 32$; 20) $x = 4$ und $x = 2$ und $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$, $y = 2$ u. $y = 4$ u. $y = 4 \mp 2\sqrt{2}$, $z = 8$ und $z = 6$; 21) $x = 3$ und $x = -9$; 22) $x = +10$ und $x = -14$; 23) $x = +12$, $x = -6$; 24) $x = +9$, $x = -1$; 25) $x = +15$, $x = -14$; 26) $x = 6\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$; 27) $x = 8$, $x = -2\frac{1}{4}$; 28) $x = 5$, $x = -4\frac{1}{3}$; 29) $x = 60\frac{2}{3}$, $x = 16\frac{2}{7}$; 30) $x = 6\frac{3}{7}$, $x = 3\frac{1}{4}$; 31) $x = 1,3699\ldots$, $x = -1,7032$; 32) $x = 1 + \sqrt{-9}$, $x = 1 - \sqrt{-9}$; 33) $x = 14$, $x = -10$; 34) $x = 5\frac{2}{5}$, $x = 5$; 35) $x = 7\frac{22}{113}$, $x = 2\frac{1}{2}$; 36) $x = 9$, wenn alle Wurzeln ihre absoluten Werthe vorstellen; 37) $x = 1$, $x = -28$; 38) $x = 243$, $x - 28\frac{5}{8}$; 39) $x = -5$, $x = -7$; 40) $x = \frac{d}{c}$, $x = -\frac{b}{a}$; 41) $x = \frac{2a - b}{ac}$, $x = -\frac{3a + 2b}{bc}$; 42) $x = \frac{b - c + a}{\sqrt{a}}$, $x = \frac{b - c - a}{\sqrt{a}}$;

43) $x = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}}$, $x = \sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}}$;

44) $x = \pm 5,\ x = \pm 7$; 45) $x = \dfrac{c + \sqrt{c^2 + 4ac}}{2(a - b)}$,

$x = \dfrac{c - \sqrt{c^2 + 4ac}}{2(a - b)}$; 46) $x = \dfrac{c}{a - b},\ x = b$;

47) $x = \left[-\dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - b}\,\right]^{2n}$;

48) $x = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}},\ x = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$; 49) $x = \sqrt[5]{a + b}$,

$x = \sqrt[5]{a - b}$; 50) $x = \left(\dfrac{a + \sqrt{b}}{a}\right)^2,\ x = \left(\dfrac{a - \sqrt{b}}{a}\right)^2$;

51) $\left\{\begin{matrix} x = 18, & x = \frac{25}{2} \\ y = 3, & y = -\frac{5}{2} \end{matrix}\right\}$; 52) $\left\{\begin{matrix} x = 2, & x = -\frac{1}{3} \\ y = 4, & y = \frac{5}{3} \end{matrix}\right\}$;

53) $\left\{\begin{matrix} x = 9, & x = -\frac{225}{16} \\ y = 4, & y = -\frac{25}{4} \end{matrix}\right\}$; 54) $\left\{\begin{matrix} x = 6, & x = 9, & x = -9 \mp \sqrt{5} \\ y = 4, & y = 1, & y = -3 \pm \sqrt{5} \end{matrix}\right\}$;

55) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a - b + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 - 2b - 2a + 1}}{2} \\ y &= \frac{2b}{a - b - 1 \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 - 2b - 2a + 1}} \end{aligned}\right\};$$

56) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(a + b)}}{2} \\ y &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(a - b)}}{2} \end{aligned}\right\};$$ 57) $\left\{\begin{matrix} x = 5, & x = 12 \\ y = 4, & y = -3 \end{matrix}\right\}$;

58) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{d\sqrt{a - b}}{c + d} \\ y &= \frac{\sqrt{2acd + b(c^2 + d^2)}}{c + d} \\ z &= \frac{c\sqrt{a - b}}{c + d} \end{aligned}\right\};$$

59) $$\left\{\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\frac{(a - c + b)(a - b + c)}{2(c - a + b)}} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{(a - c + b)(c - a + b)}{2(a - b + c)}} \\ z &= \pm\sqrt{\frac{(c - a + b)(a - b + c)}{2(a - c + b)}} \end{aligned}\right\};$$

60) $x = 2$; 61) $x = -3$; 62) $x = +8$; 63) $x = 3{,}36216\ldots$;
64) $x = 4{,}30213\ldots$; 65) $x = -1$; 66) $x = 11$; 67) $x = 7$;

68) $x=2, 3, 4$; 69) $x=-1, 2, 7$; 70) $x=-3, -5, 8$; 71) $x=\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -6$; 72) $x=1, \frac{5}{3}, 2$; 73) $x=-\frac{2}{3}, \frac{21}{5}, -9$; 74) $x=14, +\sqrt{5}, -\sqrt{5}$; 75) $x=5, 4+\sqrt{7}, 4-\sqrt{7}$; 76) $x=4, 1+\sqrt{-10}, 1-\sqrt{-10}$; 77) $x=1, 2, 3, 4$; 78) $x=1, -2, -6, 7$; 79) $x=-3, -5, -8, -13$; 80) $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 3$; 81) $x=\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{8}, 2$; 82) $x=1, 3, -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{53}, -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{53}$; 83) $x=3, 3, -3, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$; 84) $x=1, \frac{4}{3}, \frac{91}{72}, \frac{2253638}{1788696}$ *) 2c.; 85) $x=3, \frac{28}{9}, \frac{65774}{21168}$ 2c.; 86) $x=3, \frac{10}{3}, \frac{938}{279}$ 2c.; 87) $x=5, \frac{16}{3}, \frac{385}{72}$; 88) $x=6, \frac{47}{8}, \frac{137615}{23436}$ 2c.; 89) $x=2, \frac{17}{8}, \frac{137597}{64736}$ 2c.; 90) $x=4, \frac{167}{42}, \frac{4096104771}{1030204056}$ 2c.

Funfzehntes Kapitel.

Von den unbestimmten Gleichungen oder von den diophantischen Aufgaben.

Was heißen unbestimmte Gleichungen oder diophantische Aufgaben?

Wie werden solche Aufgaben gelöst?

Wodurch wird die große Anzahl der Auflösungen öfters beschränkt?

Aufgaben.

Man soll folgende Gleichung nach der positiv ganzen Zahl x auflösen:

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{3} &= y + \tfrac{1}{3} \\ \frac{x}{5} &= z + \tfrac{2}{5} \end{aligned} \right\};$$

---

*) Man bemerke, daß 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{91}{72}$ u. s. w. die auf einander folgenden Näherungswerthe von x ausdrücken.

Man soll folgende Gleichungen nach der positiv ganzen Zahl x auflösen:

2) $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{8}=y+\frac{5}{8}\\ \frac{x}{11}=z+\frac{4}{11}\end{array}\right\}$;

3) $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{9}=y\\ \frac{x}{14}=z+\frac{8}{14}\end{array}\right\}$;

4) $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{3}=y+\frac{2}{3}\\ \frac{x}{7}=z+\frac{3}{7}\\ \frac{x}{10}=v+\frac{9}{10}\end{array}\right\}$;

5) $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{5}=y+\frac{3}{5}\\ \frac{x}{6}=z+\frac{1}{6}\\ \frac{x}{7}=v+\frac{5}{8}\\ \frac{x}{8}=w+\frac{5}{8}\end{array}\right\}$;

6) $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{6}=y+\frac{1}{6}\\ \frac{x}{12}=z+\frac{1}{12}\\ \frac{x}{15}=v+\frac{10}{15}\end{array}\right\}$.

Man soll folgende Gleichungen nach den positiv ganzen Zahlen x, y, z, w auflösen:

7) $\left\{\begin{array}{l}3w-2x=36\\ 2w-3y=24\\ 7y-4z=20\end{array}\right\}$;

8) $\left\{\begin{array}{l}3w+2x-3z=38\\ 7w-6x=17\\ 5w-3y=31\end{array}\right\}$;

9) $\left\{\begin{array}{l}13w+5x-9y-8z=109\\ 7w-2x=49\end{array}\right\}$.

Man soll folgende Gleichungen nach den positiv ganzen Zahlen x und y auflösen:

10) $2x^2 = 5y$;
11) $2x^2 + 5y = 500$;
12) $2x^2 + 4x + 7y = 65$;
13) $2x^2 + 4x + 5y + 3xy = 188$;
14) $y^2 = 4x^2 + 3x + 14$.

Resultate.

1) $x = 7, 22, 37, 52, 67, 82$ ꝛc., oder $x = 15n + 7$, wenn n entweder 0 oder jede positiv ganze Zahl ausdrückt; 2) $x = 37, 125, 213, 301, 389$ ꝛc., oder $x = 88n + 37$; 3) $x = 36, 162, 288, 414, 540$ ꝛc., oder $x = 126n + 36$; 4) $x = 59, 269, 479, 689, 899$ ꝛc., oder $x = 210n + 59$; 5) $x = 133, 973, 1813, 2653, 3493$ ꝛc., oder $x = 840n + 133$; 6) $x = 25, 85, 145, 205, 265$ ꝛc., oder $x = 60n + 25$;

7) $\left\{\begin{array}{l} x = 9, 18, 27 \text{ ꝛc., oder } x = 9\,(1+n) \\ y = 4, 8, 12 \text{ ꝛc., oder } y = 4\,(1+n) \\ z = 2, 9, 16 \text{ ꝛc., oder } z = 2 + 7n \\ w = 18, 24, 30 \text{ ꝛc., oder } w = 6\,(3+n) \end{array}\right\}$;

8) $\left\{\begin{array}{l} x = 10, 31, 52 \text{ ꝛc., oder } x = 10 + 21n \\ y = 8, 38, 68 \text{ ꝛc., oder } y = 2(4 + 15n) \\ z = 5, 37, 69 \text{ ꝛc., oder } z = 5 + 32n \\ w = 11, 29, 47 \text{ ꝛc., oder } w = 11 + 18n \end{array}\right\}$;

9) $\left\{\begin{array}{l} x = 7, 14, 21 \text{ ꝛc.} \\ y = 3, 8, 13 \text{ ꝛc.} \\ z = 2, 4, 6 \text{ ꝛc.} \\ w = 9, 11, 13 \text{ ꝛc.} \end{array}\right\}$; 10) $\left\{\begin{array}{l} x = 5, 10, 15, 20 \text{ ꝛc.} \\ y = 10, 40, 90, 160 \text{ ꝛc.} \end{array}\right\}$;

11) $\left\{\begin{array}{l} x = 5, 10, 15 \\ y = 90, 60, 10 \end{array}\right\}$; 12) $\left\{\begin{array}{l} x = 2, 3 \\ y = 7, 5 \end{array}\right\}$; 13) $\left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 4 \end{array}\right\}$;

14) $\left\{\begin{array}{l} x = 13 \\ y = 27 \end{array}\right\}$.

Sechzehntes Kapitel.

Was heißt eine einfache arithmetische Progression?

Was versteht man unter den Gliedern einer solchen Progression?

Was nennt man den Unterschied der Glieder?

Wann wird eine einfache arithmetische Progression steigend und wann fallend genannt?

Formeln.

I. $u = a + (n-1)d$ *);

II. $u = \frac{2s - na}{n}$;

III. $u = \frac{-d \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2}$;

IV. $u = \frac{2s + n(n-1)d}{2n}$;

V. $a = u - (n-1)d$;

VI. $a = \frac{2s - nu}{n}$;

VII. $a = \frac{d \pm \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2}$;

VIII. $a = \frac{2s - n(n-1)d}{2n}$;

IX. $d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}$;

X. $d = \frac{(u+a)(u-a)}{2s-(u+a)}$;

XI. $d = \frac{2(nu - s)}{n(n-1)}$;

XII. $d = \frac{u-a}{n-1}$;

---

*) Man bemerke, daß a das erste und u das letzte oder nte Glied, d den Unterschied, s die Summe und n die Anzahl der Glieder einer einfachen arithmetischen Progression bezeichnet.

XIII. $n = \frac{u - a + d}{d}$;

XIV. $n = \frac{2s}{a + u}$;

XV. $n = \frac{-(2a - d) \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}}{2d}$;

XVI. $n = \frac{(2u + d) \pm \sqrt{(2u + d)^2 - 8ds}}{2d}$;

XVII. $s = [2a + (n - 1)d] \cdot \frac{n}{2}$;

XVIII. $s = \frac{(a + u) \cdot n}{2}$;

XIX. $s = [2u - (n - 1)d] \cdot \frac{n}{2}$;

XX. $s = \frac{(u - a + d)(u + a)}{2d}$.

Aufgaben.

Aus folgenden einfachen arithmetischen Progressionen soll u und s ermittelt werden:

1) $a = 1$, $d = 1$, $n = 14$;
2) $a = 2$, $d = 3$, $n = 17$;
3) $a = 2\frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{3}$, $n = 100$;
4) $a = \frac{3}{4}$, $d = \frac{1}{8}$, $n = 26$;
5) $a = -7$, $d = 3$, $n = 8$;
6) $a = 3\frac{1}{3}$, $d = -2\frac{5}{6}$, $n = 15$;
7) $a = 0$, $d = \frac{1}{2}$, $n = 11$;
8) $a = -10$, $d = -2$, $n = 6$;
9) $a = -\frac{3}{4}$, $d = -\frac{7}{8}$, $n = 25$.

Resultate.

1) $u = 14$, $s = 105$; 2) $u = 50$, $s = 442$; 3) $u = 35\frac{1}{2}$, $s = 1900$; 4) $u = 3\frac{7}{8}$, $s = 60\frac{1}{8}$; 5) $u = 14$, $s = 28$; 6) $u = -36\frac{1}{3}$, $s = -247\frac{1}{2}$; 7) $u = 5$, $s = 27\frac{1}{2}$; 8) $u = -20$, $s = -90$; 9) $u = -21\frac{3}{4}$, $s = -281\frac{1}{4}$.

Siebzehntes Kapitel.

Was versteht man unter einer einfachen geometrischen Progression?

Was denkt man sich unter den Gliedern einer solchen Progression?

Was heißt Faktor (auch wohl Exponent)?

Wann wird eine einfache geometrische Progression steigend und wann fallend genannt?

Formeln.

I. $u = a \cdot d^{n-1}$ *);

II. $u \cdot (s-u)^{n-1} = a \cdot (s-a)^{n-1}$;

III. $u = \frac{ds - s + a}{d}$;

IV. $u = \frac{d^{n-1} \cdot (d-1) \cdot s}{d^n - 1}$;

V. $a = \frac{u}{d^n - 1}$;

VI. $u(s-u)^{n-1} = a \cdot (s-a)^{n-1}$;

VII. $a = du + s - ds$;

VIII. $a = \frac{(d-1) \cdot s}{d^n - 1}$;

IX. $a \cdot d^n - sd + (s-a) = 0$;

X. $d = \frac{s-a}{s-u}$;

XI. $(s-u) \cdot d^n - s \cdot d^{n-1} + u = 0$;

XII. $d = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$;

---

*) Man bemerke, daß a das erste und u das letzte oder nte Glied, d den Faktor, s die Summe und n die Anzahl der Glieder einer einfachen geometrischen Progression bezeichnet.

XIII. $s = \frac{(d^n - 1) \cdot a}{d - 1}$ *);

XIV. $s = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$;

XV. $s = \frac{(d^n - 1) \cdot u}{d^{n-1} \cdot (d - 1)}$;

XVI. $s = \frac{du - a}{d - 1}$.

Aufgaben.

Aus folgenden einfachen geometrischen Progressionen soll u und s ermittelt werden:

1) $a = 1$, $d = 2$, $n = 7$;
2) $a = 4$, $d = 3$, $n = 10$;
3) $a = 5$, $d = 4$, $n = 9$;
4) $a = 9$, $d = \frac{7}{4}$, $n = 7$;
5) $a = 6\frac{1}{4}$, $d = \frac{3}{2}$, $n = 8$;
6) $a = 7\frac{1}{2}$, $d = \frac{27}{20}$, $n = 31$.

Resultate.

1) $u = 64$, $s = 127$; 2) $u = 78732$, $s = 118096$; 3) $u = 327680$, $s = 436905$; 4) $u = 258\frac{2073}{4096}$, $s = 591\frac{741}{4096}$; 5) $u = 106\frac{403}{512}$, $s = 307\frac{441}{512}$; 6) $u = 60964,11\ldots$, $s = 235125, 85\ldots$

---

*) Ist in der Progression $n = \infty$ und d eine ächt gebrochene positive Zahl, so folgt $s = \frac{a}{1 - d}$.

Achtzehntes Kapitel.

Von den Progressionen höherer Art und von den figurirten Zahlen.

Was heißt eine arithmetische Progression höherer Art, höherer Ordnung, oder eine höhere arithmetische Progression?

Was versteht man unter der 1sten, 2ten, 3ten ꝛc. oder mten Differenzreihe?

Wann wird eine höhere arithmetische Progression von der mten Ordnung genannt?

Wodurch werden die auf einanderfolgenden Glieder einer höhern arithmetischen Progression, und die auf einanderfolgenden Glieder der 1sten, 2ten ꝛc. ten Differenzreihe ausgedrückt?

Wie wird die Summe aller Glieder einer höhern arithmetischen Progression und die Summe aller Glieder irgend einer Differenzreihe dargestellt?

Was heißt eine figurirte Reihe, oder eine Reihe der figurirten Zahlen?

Wann wird eine figurirte Reihe von der mten Ordnung genannt?

Wie werden in einer Zahlenreihe zwischen zwei zunächst auf einander folgenden Gliedern mehre Glieder eingeschaltet oder interpolirt?

Formeln.

I. $x_n = x_1 + Sd^1x_{n-1}$ *).

---

*) Man bezeichnet nämlich durch

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_{n-1}, x_n$$

die ersten n Glieder einer höhern arithmetischen Progression durch:

$$d^1x_1, d^1x_2, d^1x_3, d^1x_4 \ldots d^1x_{n-2}, d^1x_{n-1}$$

II. $x_n = x_1 + (n-1)d^1x_1 + (n-1)_2 d^2x_1 + (n-1)_3 d^3x_1 + \ldots + (n-1)_m d^m x_1$ *).

III. $Sx_n = n.x_1 + n_2 . d^1x_1 + n_3 d^2x_1 + n_4 . d^3x_1 + \ldots + n_{m+1} . d^m x_1$.

IV. Die Summe der n ersten Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 ꝛc. beträgt $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$.

V. Die Summe der n ersten Kubikzahlen 1, 8, 27, 64 ꝛc. beträgt $[(n+1)_2]^2$.

VI. Die Summe der n ersten Biquadratzahlen 1, 16, 81, 256 ꝛc. beträgt $\frac{n.(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30}$.

VII. In der figurirten Reihe der 2ten Ordnung ist $x_n = (n+1)_2$ und $Sx_n = (n+2)_3$;

VIII. In der figurirten Reihe der 3ten Ordnung ist $x_n = (n+2)_3$ und $Sx_n = (n+3)_4$.

IX. In der figurirten Reihe der 4ten Ordnung ist $x_n = (n+3)_4$ und $Sx_n = (n+4)_5$.

X. In der figurirten Reihe der mten Ordnung ist $x_n = (n+m-1)_m$ und $Sx_n = (n+m)_{m+1}$.

XI. Die Summe der ersten n Glieder der Reihe:

$1, 2e, 3e^2, 4e^3, \ldots . n.e^{n-1}$ beträgt $\frac{ne^n}{e-1} - \frac{e^n-1}{(e-1)^2}$.

XII. Die Summe der n ersten Glieder der Reihe:

$$a, (a+d).e, (a+2d)e^2, \ldots [a+(n-1)d]e^{n-1}$$

macht $\frac{e^n-1}{e-1}.a + de\left[\frac{(n-1)e^{n-1}}{e-1} - \frac{e^{n-1}-1}{(e-1)^2}\right]$.

---

die n — 1 Glieder der ihr zugehörigen ersten Differenzreihe; durch:

$$d^2x_1, d^2x_2, d^2x_3, d^2x_4 \ldots . d^2x_{n-3}, d^2x_{n-2}$$

die aus der ersten Differenzreihe entstandenen n — 2 Glieder der zweiten Differenzreihe; und durch

$$d^3x_1, d^3x_2, d^3x_3, d^3x_4 \ldots . d^3x_{n-4}, d^3x_{n-3}$$

die aus der 2ten Differenzreihe entspringenden n — 3 Glieder der 3ten Differenzreihe u. s. w. u. s. w.

Man bezeichnet ferner durch Sx_n die Summe der ersten n Glieder einer höhern arithmetischen Progression; durch Sd^1x_{n-1} die Summe der ersten n—1 Glieder der ersten Differenzreihe; durch Sd^2x_{n-2} die Summe der ersten n—2 Glieder der 2ten Differenzreihe u. s. w.; und stellt endlich durch Sd^vx_r die Summe der ersten r Glieder der vten Differenzreihe dar.

* Man bemerke, daß die Ausdrücke $(n-1)_2$, $(n-1)_3$ u. s. w. $(n-1)_m$ lauter Binomial-Coefficienten sind.

XIII. Die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$1,\ 3e,\ 6e^2,\ 10e^3, \ldots .(n+1)_2 e^{n-1}$$

beträgt $\frac{(n+1)_2}{e-1} e^n - \left[\frac{ne^n}{(e-1)^2} - \frac{e^n-1}{(e-1)^3}\right]$.

Neunzehntes Kapitel.

Von den Logarithmen.

Was heißt ein Logarithmus oder ein Logarithmen?

Was nennt man Basis und was Logarithmand?

Was versteht man unter einem Logarithmen?

Wann hat der Logarithmus eine völlig bestimmte einzige Bedeutung?

Was heißt ein Logarithmensystem, und welches wird 1) das Brigg'sche oder das vulgarische, und 2) das natürliche oder das hyperbolische genannt?

Was versteht man unter Kennziffer oder Charakteristik, und was unter Mantissa?

Wie viel ganze Einheiten enthält der Logarithmenwerth einer jeden n ziffrigen Zahl im Brigg'schen Logarithmensysteme?

Wie werden die Logarithmenwerthe der gebrochnen Zahlen gefunden?

Was nennt man den Modul eines Logarithmensystems?

Was heißt eine Logarithmentafel?

Wie ist eine solche Tafel eingerichtet; und welche ist hauptsächlich im Gebrauch?

Wie wird die Logarithmentafel angewandt?

Wie werden die logarithmischen Ausdrücke und die transscendenten Gleichungen berechnet?

Formeln.

I. Ist $a = c$, so folgt $\log^b a = \log^b c$;

II. $b^{\log^b a} = a$;

III. $\log^b (b^a) = a$;

IV. $\log^b (ac) = \log^b a + \log^b c$ oder $\log (ac) = \log a + \log c$ *);

V. $\log^b (acd) = \log^b a + \log^b c + \log^b d$ oder $\log (acd) = \log a + \log c + \log d$;

VI. $\log^b \left(\frac{a}{c}\right) = \log^b a - \log^b c$, oder $\log \left(\frac{a}{c}\right) = \log a - \log c$;

VII. $\log^b (a^c) = c . \log^b a$, oder $\log a^c = c \log a$;

VIII. $\log^b (\sqrt[c]{a}) = \frac{\log^b a}{c}$ oder $\log (\sqrt[c]{a}) = \frac{\log a}{c}$;

IX. $\log^b 0 = -\infty$, oder $\log 0 = -\infty$;

X. $\log^b 1 = 0$, oder $\log 1 = 0$;

XI. $\log^b b = 1$, oder $\log b = 1$.

XII. Ist $u = a . d^{n-1}$, so folgt $n = \frac{\log u - \log a + \log d}{\log d}$ **);

XIII. Ist $u (s-u)^{n-1} = a . (s-a)^{n-1}$,

so folgt $n = \frac{\log u - \log a}{\log (s-a) - \log (s-u)} + 1$ ***);

XIV. Ist $a = \frac{(d-1) . s}{d^n - 1}$, so folgt $n = \frac{\log (ds - s + a) - \log a}{\log d}$ †);

XV. Ist $(s-u) . d^n - sd^{n-1} + u = 0$,

so folgt $n = \frac{\log u - \log [du - s(d-1)]}{\log d} + 1$ ††);

XVI. $\log^b z = 2m . \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right]$,

wenn man durch den Modul m den Quotienten

$$\frac{1}{2\left[\frac{b-1}{b+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^5 + \ldots\right]}$$

bezeichnet.

---

*) Weil die vorhergehende Gleichung für jede positive Basis gültig ist.

**) Man vergleiche die Formel (I) des 17ten Kapitels.

***) Man lese die Formel (VI) des 17ten Kapitels.

†) Man vergleiche die Formel (VIII) des 17ten Kapitels.

††) Man lese die Formel (IX) des 17ten Kapitels.

XVII. Der Modul μ des Brigg'schen Logarithmensystems ergiebt sich $=0,434294\ldots.$, wenn man nämlich in

$$\frac{1}{2\left[\frac{b-1}{b+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^5+\ldots\right]}$$

für $b=10$ setzt.

XVIII. Bezeichnet man den Brigg'schen Logarithmus von z durch log z, so ist:

$$z=2\mu\left[\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\ldots\right].$$

XIX. $\log(y+1)=2\log y-\log(y-1)$

$$-2\mu\left[\frac{1}{2y^2-1}+\frac{1}{3(2y^2-1)^3}+\ldots\right].$$

XX. Man erhält $m=\frac{\mu}{\log b}$, wenn m der Modul eines beliebigen, μ der Modul des Brigg'schen Logarithmensystems und log b ein Brigg'scher Logarithmus ist.

XXI. Es ist $b=10^{\frac{\mu}{m}}=\sqrt[m]{10^{\mu}}$.

XXII. Ist (in Nr. 21) der Modul $m=1$, also das Logarithmensystem ein natürliches, so ergiebt sich $b=2,71828\ldots.$. Bei diesem Systeme wird aber b oder $2,71828\ldots.$ durch e und jeder Logarithmen durch ln ausgedrückt.

XXIII. Es ist ziemlich nahe $\log(P+d)=\log P+m\cdot\frac{d}{P}$, wenn P als eine sehr große Zahl und d gegen P sehr klein sich zeigt.

XXIV. Man erhält $\frac{\log(P+d)-\log P}{\log(P+d^1)-\log P}=\frac{d}{d^1}$, wenn d und d^1 in Bezug auf P sehr kleine Zahlen ausdrücken.

Aufgaben.

Man soll folgende transscendente Gleichungen nach x auflösen:

1) $a^{mx+f}b^{nx+g}=c^{px+h}d^{qx+k}$;

2) $a^{b+x}b^{c+ax}=c$;

3) $3^x=177147$;

4) $(\frac{3}{4})^x=51\frac{1}{2}$;

5) $\left(\frac{756}{345}\right)^{\frac{3x}{2}}=54783$;

6) $3^{2x} . 5^{6x-7} = 9^{x-2} . 7^{1-x}$;

7) $5^{3-x} . 17^{2x-6} = 632 . \left(\frac{39}{2}\right)^{x-3} \sqrt[9]{\left(\frac{56}{39}\right)^{5x}}$;

Man soll folgende Ausdrücke numerisch berechnen:

8) $\sqrt[5]{13}$;

9) $(1,05)^{73}$;

10) $\sqrt[14]{\left(\frac{1}{3}\right)^{187}}$;

11) $\left(\frac{167}{53}\right)^{0,32}$;

12) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,0537}$;

13) $\sqrt[35]{136} . \sqrt[5]{\frac{3425}{0,00034}}$;

14) $\sqrt[3]{5,03 + \sqrt[5]{\frac{1}{5}}}$.

Resultate.

1) $x = \frac{h . \log . c + k \log . d - f . \log . a - g . \log b}{m \log . a + n \log . b - p \log . c - q \log d}$

$= \left(\log \frac{c^h d^k}{a^f b^g}\right) . \left(\log \frac{a^m b^n}{c^p d^q}\right)$; 2) $x = \frac{\log . c - b \log . a - c \log b}{a \log . b + \log . a}$;

3) $x = 11$; 4) $x = -13,701172....$; 5) $x = 9,272299....$; 6) $x = 0,759965....$; 7) $x = 11,04027....$; 8) 1,053874; 9) 35,2224; 10) 0,00000042366; 11) 1,443779; 12) 0,982093....; 13) 28,94639....; 14) 1,79202.... .

Zwanzigstes Kapitel.

Von den Funktionen und unendlichen Reihen; von den künstlichen und natürlichen Potenzen.

Was heißt eine ganze Funktion von **x** vom pten Grade?

Was versteht man unter den Coefficienten, den Gliedern und dem Fortschreitungsbuchstaben der ganzen Funktion?

Was heißt eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe?

Wann wird dieselbe eine numerische, eine convergente und divergente genannt?

Was heißt eine allgemein numerischer Werth?

Wie wird ein zusammengesetzter Ausdruck, z. B. ein Quotient, eine Potenz u. s. w. in eine mit einem bestimmten Fortschreitungsbuchstaben versehene unendliche Reihe verwandelt?

Was versteht man unter der Methode der unbestimmten Coefficienten?

Was nennt man eine künstliche, und was eine natürliche Potenz?

Wie viele Werthe hat die künstliche und wie viele die natürliche Potenz?

Lehrsätze.

I. Ist eine ganze Funktion von x vom pten Grade, nämlich:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Px^p = 0,$$

für p + 1 Werthe von x, so ist auch jeder einzelne Coefficient dieser Funktion $= 0$. Es ist also $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0, \ldots$ und $P = 0$.

II. Ist eine ganze Funktion von x vom pten Grade, nämlich:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Px^p = 0,$$

für jeden Werth von x, so ist auch jeder einzelne Coefficient dieser Funktion $= 0$. Es ist also $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0, \ldots P = 0$.

III. Ist eine unendliche Reihe:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0$$

für jeden Werth von x, so ist auch jeder einzelne Coefficient dieser Reihe $= 0$. Es ist also $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, rc.

IV. Sind 2 mit dem nämlichen Fortschreitungsbuchstaben versehene unendliche Reihen:

$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$, und $P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + \ldots$

einander gleich für jeden Werth von x, so sind auch ihre einzelnen Coefficienten beziehlich einander gleich. Es ist also

$$A = P,\ B = Q,\ C = R,\ D = S \text{ u. s. w}$$

V. Die unendliche Reihe:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ in infinitum,}$$

convergirt, wenn x eine ächt gebrochene positive oder eine ächt gebrochene negative Zahl oder 0 ist.

VI. Die unendliche Reihe:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ in infinitum}$$

divergirt, wenn $x =$ oder > 1 ist.

VII. Die mit gleichen und reellen Coefficienten versehene unendliche Reihe:

$$A + Ax + Ax^2 + Ax^3 + \ldots \text{ in infinitum}$$

convergirt, wenn x eine ächt gebrochene positive oder negative Zahl oder 0 ist.

VIII. Die unendliche Reihe:

$$A + Ax + Ax^2 + Ax^3 + \ldots \text{ in infinitum}$$

worin A entweder eine positiv ganze oder gebrochene, eine negativ ganze oder gebrochene Zahl oder 0 vorstellt, divergirt, wenn $x =$ oder > 1 ist.

IX. Eine unendliche Reihe ist convergent, wenn sie von irgend einem Gliede ab convergent ist.

X. Enthält eine convergente unendliche Reihe R lauter positive Glieder, und hat eine andere unendliche Reihe S von ihrem mten Gliede ab entweder dieselben, oder kleinere positive Glieder als die Reihe R, so ist die Reihe S ebenfalls convergent.

XI. Die unendliche Reihe:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ in infinitum *)},$$

ist für jeden reellen Werth von x convergent.

XII. Die unendliche Reihe:

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ in infinitum},$$

ist für jeden reellen Werth von x convergent.

XIII. Die Reihe:

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ in infinitum},$$

ist für jeden reellen Werth von x convergent.

XIV. Die unendliche Reihe:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{in infinitum},$$

ist für jeden reellen Werth von x convergent

---

*) Man stellt nämlich das Produkt 1. 2. durch das Zeichen 2!, das Produkt 1. 2. 3. durch das Zeichen 3!, das Produkt 1. 2. 3. 4. durch das Zeichen 4!, das Produkt 1. 2.... n durch das Zeichen n! dar; und spricht das erste Zeichen 2 Fakultät, das zweite 3 Fakultät, das dritte 4 Fakultät, und das vierte n Fakultät aus.

XV. Die unendliche Reihe:

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots \text{ in infinitum,}$$

ist für jeden reellen Werth von x convergent.

XVI. Die unendliche Reihe:

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \text{ in infinitum,}$$

ist für jeden reellen Werth von x convergent.

XVII. Die unendliche Reihe:

$$1+\frac{A}{1}.x+\frac{A^2}{2!}.x^2+\frac{A^3}{3!}.x^3+\frac{A^4}{4!}.x^4\ldots \text{ in infin.,}$$

ist für jeden allgemein numerischen Werth von A und x convergent.

XVIII. Die unendlichen Reihen:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots, \text{ und}$$

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

sind für jeden allgemeinen numerischen Werth von x convergent.

XIX. Giebt man in der unendlichen Reihe:

$$A+Ax+Ax^2+Ax^3+\ldots \text{ in infinitum,}$$

worin A reell und absolut ist, dem Fortschreitungsbuchstaben x einen positiven Werth, welcher $<\frac{1}{2}$ ist, so wird das erste Glied A größer als die Summe der übrigen unendlich vielen Glieder der gegebenen Reihe.

XX. Ist in einer numerisch unendlichen Reihe das erste Glied positiv, so kann man dem Fortschreitungsbuchstaben (x) immer einen solchen Werth geben, daß der Werth dieser Reihe einer positiven Zahl gleich sein muß.

XXI. Ist in einer numerisch unendlichen Reihe das erste Glied negativ, so kann man dem Fortschreitungsbuchstaben (x) immer einen solchen Werth geben, daß der Werth dieser Reihe einer negativen Zahl gleich sein muß.

XXII. Der Werth einer numerisch unendlichen Reihe hängt blos von dem ersten Gliede derselben ab, weil diese Reihe für gewisse Werthe des Fortschreitungsbuchstaben (x) selbst positiv oder negativ wird, je nachdem das erste Glied derselben positiv oder negativ ist.

XXIII. Ist in einer numerisch unendlichen Reihe das erste Glied positiv, so kann der Werth dieser Reihe nicht für jeden Werth von x negativ sein.

XXIV. Ist umgekehrt der Werth einer numerisch unendlichen Reihe negativ für jeden Werth von x, so kann das erste Glied nicht positiv sein.

XXV. Ist in einer numerisch unendlichen Reihe das erste Glied negativ, so kann der Werth dieser Reihe nicht für jeden Werth von x positiv sein.

XXVI. Ist umgekehrt der Werth einer numerisch unendlichen Reihe positiv für jeden Werth von x, so kann das erste Glied dieser Reihe nicht negativ sein.

XXVII. $a^x = 1 + \frac{La}{1!}x + \frac{(La)^2}{2!}x^2 + \frac{(La)^3}{3!}x^3 + \ldots;$

XXVIII. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$ wenn $e = 2{,}71828\ldots$ bezeichnet.

XXIX. $a^x = e^{x \cdot La}$.

XXX. Man hat

$$\left\{\begin{array}{l} a^x . a^y = a^{x+y}, \\ a^x . a^y = a^{x-y}, \\ a^{-x} \;\; = \frac{1}{a^x}, \\ a^x . b^x = (ab)^x, \\ a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \\ (a^x)^m \;\; = a^{xm}, \end{array}\right\}$$

wenn alle vorkommenden Potenzen künstliche sind und **m** eine reelle Zahl ausdrückt.

XXXI. Es ist

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\; e^x . e^y = e^{x+y}, \\ 2)\; e^x : e^y = e^{x-y}, \\ 3)\; e^{-x} \;\; = \frac{1}{e^x}, \\ 4)\; e^x . e^x = e^{2x}, \\ 5)\; e^x : e^x = e^{x-x} = e^0 = 1 \\ 6)\; (e^x)^m = e^{xm}, \end{array}\right\}$$

wenn x eine allgemein numerische, **m** eine reelle Zahl, und $e = 2{,}71828\ldots$ ausdrückt.

XXXII. Die unendliche Reihe:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ in infinitum},$$

ist für jeden allgemein numerischen Werth von x convergent.

XXXIII. Die unendliche Reihe:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ in infinitum,}$$

ist für jeden allgemein numerischen Werth von x convergent.

XXXIV. $$\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots;$$

XXXV. $$\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Von den kombinatorischen Operationen.

Was heißt eine Complexion oder Form?

Wann ist eine Complexion ohne oder mit Wiederholungen?

Was nennt man den Zeiger oder den Index?

Wann wird eine Verbindung wohlgeordnet genannt?

Wann heißen die Formen Unionen, Binionen oder Amben, Ternionen oder Ternen, Quaternionen oder Quaternen, Quinternen oder Quinen u. s. w.?

Wann heißt eine gegebene Form permutirt oder versetzt?

Was heißt eine 2te, 3te oder mte Permutationsklasse?

Wie wird die mte Permutationsklasse dargestellt?

Was heißt gegebene Elemente zu zweien, dreien u. s. w. combiniren?

Was nennt man eine 1te, 2te, 3te, nte Combinationsklasse?

Wann heißen die Combinationen ohne oder mit Wiederholungen?

Wie werden die Combinationen irgend einer Klasse aus gegebenen Elementen entwickelt?

Wie viele Klassen entstehen bei den Combinationen ohne Wiederholungen?

Was heißt gegebene Elemente zu zweien, dreien u. s. w. variiren?

Was versteht man unter einer 1sten, 2ten, 3ten oder nten Variationsklasse?

Wann heißen die Variationen ohne oder mit Wiederholungen?

Wie werden die Variationen irgend einer Klasse aus gegebenen Elementen entwickelt?

Wie viele Klassen entstehen bei den Variationen mit Wiederholungen, und wie viele bei den Variationen ohne Wiederholungen?

Wie werden die Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen entwickelt?

Lehrsätze.

I. Die Anzahl der Verbindungen der mten Permutationsklasse ohne Wiederholungen ist: $m!$

II. Befinden sich unter den m Elementen α gleiche, und sind die übrigen von einander verschieden, so ist die Anzahl der Verbindungen der mten Permutationsklasse: $\frac{m!}{\alpha!}$; sind aber außer jenen α gleichen Elementen einer Art auch noch β gleiche Elemente einer andern Art vorhanden, so ist die Anzahl der Verbindungen der mten Permutationsklasse: $\frac{m!}{\alpha!\ \beta!}$ und sind außerdem noch γ Elemente einer 3ten Art vorhanden, so ist die Anzahl der Verbindungen der mten Permutationsklasse: $\frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!}$ ꝛc.

III. Sind unter den m Elementen nur 2 verschiedene Arten, nämlich α Elemente einer Art und $m-\alpha$ einer andern befindlich, so ist die Zahl Z der Verbindungen der mten Permutationsklasse: ${}^{m}\alpha$.

IV. Die Anzahl der Combinationsformen ohne Wiederholung aus m Elementen ist: in der 1sten Klasse $= m$,
" " " " $= m_2$,
" " " " $= m_3$,
. . . .
und in der pten Klasse $= m_p$.

V. Die Anzahl der Combinationsformen mit verstatteter Wiederholung aus m Elementen ist: in der 1sten Klasse $= m$,
" " 2ten " $= (m+1)_2$,
" " 3ten " $= (m+2)_3$,
. . . .
und in der pten Klasse $= (m+p-1)_p$.

VI. Die Anzahl der Variationen der pten Klasse aus m Elementen ohne Wiederholungen ist: $m.(m-1).(m-2)\ldots(m-p+1)$.

VII. Die Anzahl der Variationen der pten Klasse aus m Elementen bei verstatteten Wiederholungen ist: m^p.

II.

Formeln und Aufgaben
aus
der allgemeinen Größenlehre.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Erstes Kapitel.

Von der Gleichung, der Ungleichung, dem Produkte und dem Quotienten.

Wann heißen zwei Größen gleichartig und wann ungleichartig?

In welchem Falle heißt eine Größe durch eine benannte Einheit gemessen, und was nennt man das Maß und das Gemäß?

Wie wird eine einfache und wie eine zusammengesetzte benannte Zahl auf eine allgemeine Weise dargestellt?

Wann heißen zwei Größen gleich und wann ungleich?

Was versteht man unter der Summe und was unter der Differenz zweier Größen?

Wie werden gleichartige Größen zu einander addirt und von einander subtrahirt?

Was versteht man unter dem aus einer Größe und einer unbekannten Zahl gebildeten Produkte?

Wie werden Größen mit unbenannten Zahlen multiplicirt?

Kann man eine Größe mit einer andern multipliciren?

Was versteht man unter dem Quotienten zweier gleichartigen Größen?

Wie wird eine Größe durch eine andere gleichgleichartige oder durch eine unbenannte Zahl dividirt?

Welche Sätze der Zahlenlehre finden auch in der allgemeinen Größenlehre statt?

Giebt es entgegengesetzte Größen?

Was heißt eine geometrische Größenproportion?

Was nennt man die geometrischen Verhältnisse, und die mittlere und dritte Proportionalgröße?

Wann ist das geometrische Verhältniß rational und wann irrational?

In welchem Falle nennt man zwei Größen commensurabel und in welchem incommensurabel?

Wie werden die Sätze der allgemeinen Größenlehre auf das gewöhnliche Rechnen angewandt?

Formeln und Lehrsätze.

1) $xE + yE = (x + y)E$;

2) $xE - yE = (x - y)E$;

3) Das Ganze ist seinen einzelnen Theilen zusammengenommen gleich, und also größer als jeder Theil.

4) Soll man eine Größe A cmal nehmen, so multiplicirt man das Maß von A mit c, und behält die gegebene Einheit bei. Ist nämlich $A = xE$, so folgt $(xE)c = (xc)E = (cx)E$.

5) Soll man den cten Theil von A ermitteln, so dividirt man das Maß von A durch c, und behält ebenfalls die gegebene Einheit bei. Ist $A = xE$, so ergiebt sich

6) $(xE) : c = \left(\frac{x}{c}\right)E$.

7) Die Größe $\frac{x}{c}E$ bezeichnet das xfache des cten Theils der Einheit E.

8) Ist $A = xE$ und $E = yF$ *), so folgt $A = (xy)F$.

9) Ist $xE = yF$, so folgt $1E = \frac{y}{x}F$ und $1F = \frac{x}{y}E$.

10) Haben 2 Größen A und B gleiche Maße, wenn man sie als benannte Zahlen von der Einheit X darstellt, so müssen sie

*) ist also die Einheit E selbst einer benannten Zahl gleich.

auch gleiche Maße haben, wenn man sie als benannte Zahlen von der Einheit Z ausdrückt.

11) Ist das Maß von A größer, als das von B, wenn man beide Größen als benannte Zahlen von der Einheit X darstellt, so so muß auch das Maß von A größer, als das von B sein, wenn man beide Größen als benannte Zahlen von der Einheit Z ausdrückt.

12) Stellt man 2 Größen A und B zuerst als benannte Zahlen von der Einheit X, und hernach als benannte Zahlen von der Einheit Z dar, so sind in beiden Fällen die Quotienten der Maße beider Größen einander gleich.

13) Ist $A:B=C:D$, so folgt

$$\left\{\begin{array}{l} A\,.\,D=B\,.\,C \\ A=\frac{BC}{D} \\ B=\frac{AD}{C} \\ C=\frac{AD}{B} \\ D=\frac{BC}{A} \\ A:C=B:D \\ B:A=D:C \\ B:D=A:C \\ C:A=D:B \\ C:D=A:B \\ D:B=C:A \\ D:C=B:A \text{ rc.} \end{array}\right\}$$

wenn A, B, C, D die Maße der paarweise durch dieselbe Einheit gemessenen Größen darstellen.

14) Hängt eine Größe M von 2 andern Größen A und B, und eine Größe N von 2 andern C und D dergestalt ab,

daß $\left\{\begin{array}{l} M:N=B:D, \text{ wenn } A=C \\ M:N=A:C, \text{ wenn } B=D \end{array}\right\}$ ist,

so muß für alle Werthe von A, B und C, D:

$M:N=(A.B):(C.D)$ sein.

15) Hängt die Größe M von 3 andern Größen A, B, C, und die Größe N von D, E, F so ab,

daß $\left\{\begin{array}{l} M:N=C:F, \text{ wenn } A=D \text{ und } B=E \\ M:N=B:E, \text{ wenn } A=D \text{ und } C=F \\ M:N=A:D, \text{ wenn } B=E \text{ und } C=F \end{array}\right\}$ ist,

so folgt allgemein

$$M:N=(A.B.C):(D.E.F).$$

16) Ist M von A, B, C, D und N von E, F, G, H so abhängig, daß sich M zu N verhält, wie je das 4te Paar der Größen, wenn die übrigen 3 Paare beziehlich einander gleich sind, so ist allgemein:

$$M:N=(A.B.C.D):(E.F.G.H).$$

17) Ein Kapital von a Thlrn. trägt in n Jahren zu p% $\frac{apn}{100}$ Thlr. Zins.

18) Bezeichnet man das zu p% ausgeliehene Kapital von a Thlrn. nebst seinen njährigen Zinsen durch Q, so ist:

$$\left\{ \begin{aligned} Q &= a+\frac{apn}{100}=\frac{(100+pn).a}{100} \\ a &= \frac{100.Q}{100+pn} \end{aligned} \right\}$$

Zweites Kapitel.

Von einigen Anwendungen der allgemeinen Größenlehre auf die Algebra.

Wodurch werden die unbekannten Größen ausgedrückt?

Wie werden aus gegebenen Größen andere ermittelt, welche auf eine gegebene Weise von den gegebenen Größen abhängen?

Aufgaben.

I. Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten *).

1) Jemand hat eine Anzahl Thaler, die er nach der Form eines Quadrats ordnen wollte. Bei dem ersten Versuche blieben ihm 130 Thlr. übrig, als er aber die Seite des Quadrats um

---

*) Man bemerke, daß viele einfache Gleichungen mit einer Unbekannten im 12ten Kapitel des 1sten Theiles befindlich sind.

3 Thlr. vergrößerte, blieben ihm nur 31 Thlr. übrig. Wie viel Thlr. hatte er?

2) Ich multiplicirte eine gewisse Zahl mit 3, zog aus dem Produkte die Quadratwurzel, addirte diese zu 15, und dividirte die Summe durch 7, da erhielt ich 3. Welche Zahl ist es?

3) Eine mit 3 gleichen Ziffern geschriebene Zahl giebt, wenn man 6 dazu addirt, und aus der Hälfte die Quadratwurzel zieht, das Resultat 15. Welches ist die Zahl?

4) Von meinem Gelde gab ich den 4ten Theil weg, und legte dafür 10 Thlr. zu. Von dieser Summe gab ich dann abermals den 4ten Theil fort, und legte wieder 10 Thlr. zu. Das 4fache der Quadratwurzel der so entstandenen Summe ist 17. Wie Geld hatte ich anfangs?

5) Welche Zahl liefert, wenn man ihren nten Theil zu a addirt, aus der Summe die Quadratwurzel zieht und den mten Theil derselben von b subtrahirt, den Ausdruck c als Resultat?

6) Eine Zahl a in zwei solche Theile zu theilen, daß der Quotient ihrer Quadratwurzeln wieder = a wird. Welches sind die beiden Theile?

7) Eine Zahl a in zwei solche Theile zu zerlegen, daß das Produkt ihrer Quadratwurzeln dem doppelten kleinern Theile gleich werde. Wie groß sind die beiden Theile?

8) Wenn man von dem Dreifachen einer Zahl eins subtrahirt, zu dem Quadrate dieses Restes 41 addirt, und aus dem 9ten Theile dieser Summe die Quadratwurzel nimmt, so geht die Zahl wieder hervor. Wie groß ist diese Zahl?

9) Ein Kapitalist hat sein Kapital von a Thlr. zu p % ausstehen und muß jährlich b Thlr. Vermögenssteuer zahlen. Wenn er nun künftig die nfache Steuer zu zahlen hat, um wie viel muß er den Zinsfuß erhöhen, damit die vermehrte Last auf seine Schuldner fällt?

10) Der ate, bte und cte Theil einer Zahl ist um d größer als der nte Theil dieser Zahl. Wie groß ist die Zahl?

11) A ist jetzt nmal so alt wie B; vor p Jahren war das Alter des A in Jahren ausgedrückt so groß wie das mfache Alter des B. Wie alt ist jetzt ein Jeder?

12) A ist jetzt n Jahre älter als B; nach p Jahren ist die Quadratwurzel aus dem Alter des A um eins größer als die Quadratwurzel aus dem Alter des B. Wie alt ist jetzt Jeder?

13) A nimmt zu Anfang eines Jahres b Thlr. von seinem Vermögen zur Bestreitung der Ausgaben für dieses Jahr, und gewinnt mit dem Rest p %. Zu Anfang des 2ten nimmt er 2b Thlr für die Ausgaben dieses 2ten Jahres, und gewinnt mit dem Rest wieder p %. Zu Anfang des dritten Jahres nimmt er 3b Thlr. für die Ausgaben dieses Jahres, und ge-

mit dem Reste wieder p $\frac{0}{0}$. Zu Ende des dritten Jahres hat er nmal so viel wie zu Anfang des ersten. Wie viel hatte er anfangs?

II. Einfache Gleichungen mit mehren Unbekannten *).

14) Zwei Geldbeutel enthalten zusammen 300 Thlr. Nimmt man 30 Thlr. aus dem ersten und legt sie in den zweiten, so ist in beiden gleich viel. Wie viel enthält jeder?

15) A sagt zu B: gieb mir 100 Thlr. so habe ich so viel als Du. Nein, sagt B zu A, gieb Du mir lieber 100 Thlr., so habe ich doppelt so viel als Du. Wie viel hat jeder?

16) A und B besitzen ein Vermögen von 570 Thlr. Wäre das Vermögen des A dreimal, und das des B fünfmal so groß, als jedes wirklich ist, so würden sie zusammen 2350 Thlr. besitzen. Wie viel hat jeder?

17) Ein Kapitalist nimmt 8000 Thlr. auf, weil er Gelegenheit hat 23000 Thlr. zu höhern Procenten unterzubringen, und er hat einen Ueberschuß von 905 Thlrn. an jährlichen Zinsen. Unter den nämlichen Bedingungen nimmt er einerseits 9400 Thlr. auf und verleiht 17500 Thlr.; dies bringt ihm einen Ueberschuß von 539½ Thlr. an jährlichen Zinsen. Zu wie viel $\frac{0}{0}$ hat er das Geld aufgenommen und ausgeliehen?

18) Ein Wasserbehälter von 210 Eimern kann durch zwei Oeffnungen gefüllt werden. Man hat durch einen Versuch, bei welchem die erste 4 und die zweite 5 Stunden offen war, 90 Eimer Wasser erhalten. Durch einen andern Versuch, bei welchem die erste Oeffnung 7, und die andere 3½ Stunden offen war, erhielt man 126 Eimer. Wie viel Eimer giebt jede Oeffnung in einer Stunde? Und in welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn das Wasser durch beide Oeffnungen zugleich einfließt?

19) Es giebt einen Bruch, der so beschaffen ist, daß, wenn man zum Zähler 1 addirt, der Werth desselben $=\frac{1}{3}$, und wenn man zum Nenner 1 addirt, der Werth desselben $=\frac{1}{4}$ ist. Welcher Bruch ist es?

20) B hat 12600 Thlr. mehr als A ausgeliehen und sein Geld um 1$\frac{0}{0}$ höher untergebracht, weshalb er auch an jährlichen Zinsen 730 Thlr. mehr zieht. C hat 3000 Thlr. mehr als A und auch zu 2$\frac{0}{0}$ höhern Zinsen ausgeliehen, und dafür jährlich 380 Thlr. mehr Zinsen als A gezogen. Wie viel hat jeder ausgeliehen? Und zu welchen Procenten?

---

*) Im 12ten Kapitel des 1sten Theiles sind mehre hierher gehörige Aufgaben befindlich.

21) Ein Werk soll so gedruckt werden, daß auf jede Seite eine bestimmte Anzahl Zeilen, und in jede Zeile eine bestimmte Anzahl Buchstaben kommen. Wollte man auf die Seite 3 Zeilen mehr, und in die Zeile 4 Buchstaben mehr bringen, so würde sie 224 Buchstaben mehr als vorher enthalten; wollte man aber auf die Seite 2 Zeilen weniger, und in die Zeile 3 Buchstaben weniger bringen, so würden auf die Seite 145 Buchstaben weniger kommen. Wie viele Zeilen müssen nun auf die Seite, und wie viele Buchstaben in jede Zeile gebracht werden?

22) Jemand hat zwei Fässer, und in jedem eine gewisse Quantität Wein. Um in beide gleich viel zu bekommen, gießt er aus dem ersten Fasse so viel in das zweite als schon darin ist, gießt hierauf wieder aus dem zweiten in das erste so viel, als nun darin ist, und endlich wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als noch darin übrig ist. Am Ende hat er in jedem Fasse 16 Quart Wein. Wie viel Quart waren anfangs darin?

23) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Differenz, Summe und Produkt sich gegen einander wie die Zahlen 2, 3, 5 verhalten. Welche Zahlen sind es?

24) Die Summe zweier Zahlen soll 13, und der Unterschied ihrer Quadrate 39 sein. Welche Zahlen sind es?

25) Das bis jetzt bekannte kleinste Säugethier ist die sibirische Spitzmaus. Ihr Gewicht in Lothen ausgedrückt giebt einen Bruch von der Art, daß er einer Einheit gleich wird, wenn man seinen Zähler um 3 vermehrt und zugleich den Nenner um 4 vermindert; vermehrt man aber den Zähler um 4 und den Nenner um 7, so wird er gleich $\frac{1}{3}$. Wie viel Loth wiegt die sibirische Spitzmaus?

26) **A** nahm aus einem Spiele Karten, das aus 52 Blättern bestand, eine Anzahl Blätter weg; dasselbe that **B** mit einem andern Spiele. Die Anzahl der Karten, die **A** übrig ließ, nebst der Anzahl derer, die **B** wegnahm, betrug 50, die Anzahl der von beiden übrig gelassenen Karten überstieg die Zahl der weggenommenen um 64. Wie viel Karten nahm jeder weg?

27) Ein Hühnerhändler treibt eine Heerde Gänse und Truthühner in die Stadt. Um sie von andern, die unterwegs noch dazu kommen, zu unterscheiden, rupft er jedem Truthahn 3, und jeder Gans 1 Feder aus, und findet, daß er doppelt so viel Hühner- als Gänsefedern und noch 15 Stück darüber hat. Unterwegs kauft er noch 10 Gänse, verkauft aber 15 Truthühner und findet, als er nach Hause kam, daß er mehr Gänse als Hühner hat und zwar im Verhältniß von 7:3. Wie viel Gänse und Truthühner hatte er zuerst gekauft?

28) Bei dem Vermessen eines viereckigen rechtwinkligen Gartens fand man, daß derselbe, wenn er 5 Ruthen breiter und 4 Ruthen

länger wäre, 116 Quadratruthen mehr enthalten würde; wenn er aber 4 Ruthen breiter und 5 Ruthen länger wäre, 113 Quadratruthen mehr. Wie lang und breit ist der Garten?

29) A, B und C haben zusammen 1820 Thlr. Giebt B dem A 200 Thlr. von seinem Gelde, so hat A 160 Thlr. mehr als B; erhält aber B von C 70 Thlr., so haben beide gleich viel. Wie viel hat jeder?

30) Jemand hat drei Stücke Silber von ungleichem Gehalte, nämlich 15=, 10= und 9=löthiges. Schmelzt man das 15= und 10=löthige zusammen, so entsteht daraus ein Silber, dessen Gehalt $11\frac{2}{5}$ Loth ist. Von dem nämlichen Gehalte wird auch das Silber sein, welches entsteht, wenn man das 15= und 9=löthige zusammenschmilzt. Alle drei Stücke wiegen zusammen 34 Mark. Wie viel wiegt jedes einzelne Stück?

31) Jemand bezahlt eine Summe von 67 Thlr. 6 Gr. mit 5 Dukaten, 7 Friedrichsd'or und 2 Carolin; eine Summe von 113 Thlr. 14 Gr. mit 4 Dukaten, 9 Friedrichsd'or und 8 Carolin; ferner eine Summe von 96 Thlr. mit 12 Dukaten, 6 Friedrichsd'or und 4 Carolin. Wie hoch wurden diese Goldstücke gerechnet, wenn sie bei allen Zahlungen denselben Cours hatten?

32) Drei Maurer, A, B und C sollen eine Mauer aufführen. A und B würden gemeinschaftlich diese Mauer in 12 Tagen vollenden; B und C würden erst in 20 Tagen, und A und C in 15 Tagen damit fertig. Wie viel Zeit wird jeder einzeln dazu gebrauchen? Und in welcher Zeit werden sie damit zu Stande kommen, wenn alle drei gemeinschaftlich arbeiten?

33) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren A, B, C gefüllt werden. Durch die Röhre A und B könnte es in 70 Minuten, durch die Röhren A und C in 84 Minuten, und durch die Röhren B und C in 140 Minuten geschehen. Wie viel braucht jede Röhre allein dazu? Und in welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn das Wasser durch alle drei Röhren zugleich einfließt?

34) Jemand hat drei Stücke Metall, deren jedes aus Gold, Silber und Kupfer besteht. Das erste Stück enthält 5 Loth Gold, 15 Loth Silber und 30 Loth Kupfer; das zweite enthält 20 Loth Gold, 28 Loth Silber und 48 Loth Kupfer; das dritte enthält 12 Loth Gold, 39 Loth Silber und 24 Loth Kupfer. Nun will er von jedem etwas hinwegnehmen, und alles zu einer Masse schmelzen, um dadurch eine Composition von 10 Loth Gold, 23 Loth Silber und 26 Loth Kupfer hervorzubringen. Wie viel muß er von jedem Stücke dazu nehmen?

35) A, B, C spielen Pharo. Im ersten Spiele hat A die Bank; B und C setzen den dritten Theil ihres Geldes und gewinnen. Im zweiten Spiele hält B die Bank; A und C setzen den dritten Theil ihres Geldes und gewinnen ebenfalls. Nun übernimmt C die Bank; A und B setzen den dritten Theil ihres Geldes, und auch hier verliert der Banquier. Nach dem dritten Spiele zählen sie ihr Geld, und finden, daß sie alle gleich viel haben, nämlich jeder 64 Dukaten. Wie viel hatten sie vor dem Spiele?

36) Unter drei Regimenter sollen, zur Belohnung ihrer Tapferkeit, 2652 Thlr. so vertheilt werden, daß von dem Regimente, welches sich am meisten auszeichnete, jeder Mann einen Thaler erhalten, und der Rest unter die Mannschaft der zwei übrigen Regimenter gleich vertheilt werden soll. Wird nun dieser Thaler dem ersten Regimente zuerkannt, so erhält jeder Mann von den zwei übrigen Regimentern $\frac{1}{2}$ Thlr.; giebt man diesen Thaler dem zweiten Regimente, so erhält jeder Mann von den zwei übrigen Regimentern $\frac{1}{3}$ Thlr.; fällt endlich dieser Thaler dem dritten Regimente zu, so erhält jeder Mann von den übrigen Regimentern nur $\frac{1}{4}$ Thlr. Wie stark ist jedes dieser drei Regimenter?

37) Es giebt drei Zahlen, deren Summe 83 ist. Wird von der ersten und zweiten 7 abgezogen, so verhalten sich die Reste wie 5 zu 3; wird aber von der zweiten und dritten 3 abgezogen, so verhalten sich die Reste wie 11 zu 9. Welche Zahlen sind es?

38) Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben, die in arithmetischer Proportion stehen. Wird diese Zahl durch die Summe ihrer Ziffern an sich *) dividirt, so ist der Quotient 48; zieht man aber von dieser Zahl 198 ab, so erhält man eine Zahl, welche die nämlichen Ziffern wie die gesuchte, aber in umgekehrter Ordnung enthält. Welche Zahl ist es?

39) Drei Städte haben zusammen 92000 Einwohner. Wenn nun von 500 Einwohnern 1 Rekrut genommen wird, und die erste und zweite zusammen 155, die zweite und dritte zusammen 94 Rekruten stellen, wie viel Einwohner hat jede Stadt?

40) Die Preise dreier Theaterbillets auf den 1sten, 2ten und 3ten Platz verhalten sich wie 5:3:2; 4 Billets auf den 3ten und 3 auf den 2ten kosten zusammen 21 Groschen mehr, als 2 auf den ersten. Was kostet jedes Billet?

41) Der Name einer Stadt besteht aus 4 Buchstaben. Die Stellenzahl des ersten im Alphabet ist gleich der Differenz des 3ten

---

*) Also ohne auf den Stellenwerth der Ziffern zu sehen.

und 4ten; der 2te ist um 8 kleiner als der 3te; der dritte ist um 5 kleiner als die Summe der drei übrigen; die Summe des zweiten und vierten ist 11. Wie heißt die Stadt?

42) Der Name einer Stadt besteht aus 5 Buchstaben. Der 1ste ist 2 weniger als der dritte; der 2te ist der 17te Theil von der Summe des ersten und der Zahl 2: der vierte ist die Hälfte des um 1 vergrößerten dritten; der vierte ist auch die Hälfte des fünften. Ueberdies ist die Summe der beiden ersten Buchstaben 1 weniger als der dritte. Wie heißt die Stadt?

43) A, B, C, D, E spielen mit einander, unter der Bedingung, daß derjenige, welcher verliert, allen übrigen so viel geben muß, als sie schon haben. Nun verliert zuerst A, dann B, dann C, dann D und endlich auch E. Alle verlieren nach der Reihe, und doch haben sie am Ende des 5ten Spiels sämmtlich gleich viel, nämlich jeder 32 Thlr. Wie viel hatte jeder vor dem Spiele?

III. Quadratische Gleichungen.

44) Eine Zahl zu finden, deren 4ter und 5ter Theil, mit einander multiplicirt, ein Produkt giebt, dessen 8ter Theil $=10$ ist?

45) Zwei Personen hatten eine Summe Geldes verzehrt. A hatte an Baarschaft 8 Thlr. weniger, B aber 8 Thlr. mehr bei sich, als die Schuld betrug. Beide multiplicirten ihre Baarschaft und das entstandene Produkt gab 465 Thlr. Wie groß war ihre Schuld?

46) Wenn A einem jeden der Armen, die sich regelmäßig am Neujahrstage bei ihm melden, 2 Thlr. giebt, so bleibt ihm von dem dazu bestimmten Gelde nichts übrig. Wollte er aber jedem so viel geben, als er für alle zusammen bestimmt, so müßte er 1458 Thlr. dazu verwenden. Wie viel Thaler vertheilte er und wie viel Arme waren es?

47) Ein Truppenkorps marschirte in einer regelmäßigen Kolonne mit 5 Mann mehr in der Tiefe als in der Fronte. Bei Annäherung des Feindes wurde die Fronte um 845 Mann vermehrt, so daß das Corps jetzt 5 Mann hoch marschirte. Wie stark war das Corps?

48) Zwei Reisende reisten von zwei Städten zu gleicher Zeit ab, um sich einander zu begegnen. Bei ihrem Zusammentreffen zeigte es sich, daß A 18 Meilen mehr als B zurückgelegt hatte, und daß A auf der Strecke, welche B zurückgelegt hatte, $15\frac{3}{4}$ Tage, B aber auf der von A zurückgelegten Strecke 28 Tage zugebracht haben würde. Wie weit waren die beiden Städte von einander entfernt?

49) A und B brachten zusammen 100 Eier auf den Markt, und lösten beide gleich viel. Hätte A so viel gehabt, als B, so

würde er 18 Groschen dafür erhalten haben, und hätte **B** so viel gehabt als **A**, so würde er nur 8 Groschen eingenommen haben. Wie viel Eier hat jeder?

50) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe mit der Summe ihrer 2ten Potenzen multiplicirt zum Produkte 1695, und deren Differenz mit der Differenz ihrer 2ten Potenzen multiplicirt zum Produkte 15 giebt.

51) Jemand hat dreierlei Waaren, welche zusammen 230 Thlr. 5 Gr. kosten. Das Pfund einer jeden Sorte kostet so viele Groschen, als Pfunde davon vorräthig sind. Er hat aber von der zweiten Sorte um den dritten Theil mehr als von der ersten, und von der dritten $3\frac{1}{2}$ mal so viel als von der zweiten. Wie viel Pfund hat er von jeder Sorte?

52) Ein Kaufman hat zweierlei Thee von verschiedenem Gewichte und Preise. Das Gewicht der ersten Sorte verhält sich zu dem der zweiten wie 4 zu 3. Das Pfund der ersten kostet halb so viel Groschen, als sie an Pfunden wiegt, das Pfund der zweiten kostet 6 Gr. weniger als das der ersten. Der Betrag des Thees überhaupt ist 218 Thlr. 8 Gr. Wie viel wiegt jede Sorte?

53) Jemand kauft einige Tücher zu gleichen Preisen für 60 Thlr. Wären der Tücher für eben das Geld 3 mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um 1 Thlr. wohlfeiler gekommen. Wie viel Tücher hat er gekauft?

54) Ein Wohlthäter bestimmt eine Summe von 36 Thlr. zur gleichen Vertheilung unter die Armen. Da aber 6 von denen, welchen diese Wohlthat zugedacht war, der Hülfe nicht mehr benöthigt sind, so fallen jedem der übrigen Armen für seinen Theil 2 Gr. mehr zu, als sonst geschehen wäre. Wie viele Armen waren anfänglich vorhanden?

55) 20 Personen, Männer und Weiber, verzehren in einem Gasthofe zusammen 48 Thlr.; nämlich die Männer 24 Thlr. und die Weiber eben so viel. Nun findet sich aber bei der Durchsicht der Rechnung, daß ein Mann 1 Thlr. mehr als eine Frau bezahlen mußte. Wie viele Männer befanden sich im Gasthofe?

56) Jemand kauft ein Pferd, und bezahlt dafür eine gewisse Summe, verkauft es hernach wieder für 144 Thlr., und gewinnt daran so viele Procente, als ihm das Pferd gekostet hatte. Wie viel hat es gekostet?

57) Zwei Bäuerinnen bringen zusammen 140 Eier zu Markte, die eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. Hätte ich deine Eier gehabt, sagt die eine zur andern, und hätte sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich 1 Thlr. 6 Gr. daraus gelöst. Das mag wohl sein, erwiederte die andere, hätte ich aber deine Eier gehabt und sie zu meinem Preise verkauft,

so hätte ich sogar 2 Thlr. 5 Gr. 4 Pf. daraus gelöst. Wie viel Eier brachte jede zu Markte?

58) Zwei Reisende, A und B, reisen zu gleicher Zeit von 2 Oertern, C und D, ab, A von C nach D, und B von D nach C. Unterweges begegnen sie sich und erzählen einander von dem Wege, den sie schon zurückgelegt und noch zu machen haben. Da findet es sich nun, daß A schon 30 Meilen mehr als B zurückgelegt hat, und daß nach dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten, womit sie reisen, A darauf rechnen kann, in 4 Tagen den Ort D, und B erst in 9 Tagen den Ort C zu erreichen. Wie weit ist C von D?

59) Zwei Kaufleute legten einmal 500 Thlr. zu einem Handelsgeschäfte zusammen, wozu jeder ein Gewisses hergab. Der eine ließ sein Geld 5 und der andere 2 Monate stehen, und jeder erhielt nach beendigtem Geschäfte an Kapital und Gewinn 450 Thlr. zurück. Wie viel hat jeder hergegeben?

60) Jemand wurde nach seinem Gehalte gefragt. Er antwortete: Mein Gehalt ist so groß, daß, wenn ich dasselbe um 1578 Thlr. vermehre und auch um 142 Thlr vermindere, und aus den Zahlen, welche ich dadurch erhalte, die Cubikwurzeln ziehe, diese Wurzeln um 10 unterschieden sind. Welches Gehalt hat er also?

61) Welche Zahl giebt, zu ihrer Quadratwurzel addirt, die Summe 1332?

62) Welche Zahl übertrifft ihre Quadratwurzel um $48\frac{3}{4}$?

63) Welche zwei Zahlen sind es, deren Summe, Produkt und Differenz der Quadrate einander gleich sind?

64) Es wird eine Zahl gesucht, die mit 3 Ziffern geschrieben wird, und so beschaffen ist, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern, ohne auf ihren Stellenwerth zu sehen, $=104$, das Quadrat der mittlern Ziffer aber um 4 größer sei als das doppelte Produkt der beiden andern; daß ferner, wenn 594 von der gesuchten Zahl abgezogen wird, die drei Ziffern in umgekehrter Ordnung entstehen. Welche Zahl ist es nun?

65) Es verkauft jemand eine Uhr für 171 Thlr. und gewinnt daran eben so viel Procente, als ihm die Uhr gekostet hat. Wie theuer hat er sie gekauft?

66) In einem Baumgarten stehen 2080 Bäumen regelmäßig so in Reihen gestellt, daß sie zwei vollständige Quadrate ausmachen. Das eine Quadrat enthält in jeder Reihe 8 Bäume mehr als das andere. Wie viel Bäume standen in einer Reihe eines jeden Quadrats?

67) Eine Gesellschaft soll eine gemeinschaftliche Schuld von 144 Thlr. bezahlen. Weil aber zwei Personen kein Geld hatten, mußte jede der übrigen 1 Thlr. mehr entrichten, als wenn alle bezahlt hätten. Wie viel Personen waren in der Gesellschaft?

68) Zwei Freunde, die 247 Meilen weit von einander entfernt wohnten, reisten einander entgegen. **A** legte täglich 9 Meilen zurück; und die Anzahl der Tage, nach deren Verlauf sie sich begegneten, war um 3 größer, als die Zahl der Meilen, welche **B** täglich zurücklegte. Wie viel Meilen betrug der Weg eines jeden?

69) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Differenz zwischen der Hypotenuse und der einen Kathete 4, und zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete 8 Fuß; wie groß sind die 3 Seiten?

70) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der beiden Katheten = 14, und die Differenz zwischen der Hypotenuse und der einen Kathete = 4. Wie groß sind die Seiten?

71) Es liegen 2 Reihen Rechenpfennige vor mir, wovon die obere Reihe einen Pfennig mehr als die untere enthält. Nehme ich eine gewisse Anzahl von der obern Reihe weg, und so viel, als hier übrig bleiben von der untern Reihe, so finde ich, daß das Quadrat von dem Reste in der untern Reihe, vermehrt um die Quadratwurzel dieses Restes, gleich ist 72, dividirt durch die Zahl, die von der obern Reihe weggenommen wurde, weniger 1. Wie viel Rechenpfennige wurden aus der obern Reihe weggenommen?

72) Nehme ich von den Piquetblättern eines Kartenspiels die 3 Bilder weg und mache aus dem Reste von 10 Kartenblättern 2 Haufen, so finde ich, daß die Summe der Augen in dem kleinern Haufen zu der Summe der Augen in dem größern, wie die Zahl der Karten im größern zur Zahl der Karten im kleinern Haufen sich verhält. Lege ich nun den Siebener aus dem größern Haufen in den kleinern, so ist die Differenz der Zahl der Augen in beiden Haufen gleich dem Quadrat aus der um 1 vermehrten Zahl Karten in dem kleinern. Wie viel Karten und wie viel Augen befindensich in jedem Haufen?

73) Das Vorderrad eines Wagens macht 6 Umdrehungen mehr als das Hinterrad auf einer Strecke von 360 Fuß. Wäre der Umfang eines jeden Rades um 3 Fuß größer, so würde es nur 4 Umdrehungen mehr machen, als das Hinterrad auf demselben Raum. Wie groß ist der Umfang eines jeden Rades?

74) Zwei Engländer begaben sich aus einer Stadt auf die Reise. **A** legt in 6 Tagen zweimal so viel englische Meilen zurück, als **B** in 5 Tagen, kommt aber erst 5 Tage später an seinem Reiseziele als **B** an dem seinigen an, und findet, daß sein ganzer Weg 259 Meilen mehr als der des **B** beträgt. Hätte aber **B** täglich 2 Meilen mehr zurückgelegt, und wäre **A** 6 Tage weniger unterwegs gewesen, dann würde der Weg von **A** nur 37 Meilen länger, als der von **B** gewesen sein. Wie viel

Meilen legte jeder täglich zurück, und wie viel Tage brauchte jeder zu seiner Reise?

75) Bacchus fand den Silen neben einem vollen Weinfasse schlafend; er benutzte diese Gelegenheit und trank während $\frac{2}{3}$ der Zeit, die Silen gebraucht hätte, um das ganze Faß zu leeren. Nachdem Silen erwachte, trank er den von Bacchus übriggelassenen Rest. Hätten beide zusammen getrunken, so würden sie um 2 Stunden früher mit dem Fasse fertig geworden sein; Bacchus hätte aber alsdann nur halb so viel getrunken, als er vorher dem Silen übrig gelassen hatte. In welcher Zeit hätte jeder allein das ganze Faß geleert?

76) Zwei Hauptleute ließen unter ihre Soldaten ein jeder 1200 Fl. Beute austheilen. Der letzte hatte 40 Mann weniger als der erste, und daher bekam auch jeder seiner Soldaten 5 Fl. mehr, als einer der ersten. Wie viel Soldaten hatte jeder Hauptmann?

77) Ein Rechenmeister gab seinem Schüler zwei Zahlen zu multipliciren, von welchen die eine um 75 größer als die andere war. Nach verrichteter Multiplication mußte der Schüler die Probe machen, und das Produkt durch den kleineren Faktor dividiren; der Quotient war 227 und 113 blieben übrig. Der Lehrer fand nun, daß falsch multiplicirt war, und befahl, den Fehler zu verbessern. Als der Schüler denselben gefunden hatte, sagte er, er hätte im Multipliciren nur 1 ausgelassen; nein, sagte der Lehrer, nicht 1, sondern 1000. Welche Zahlen mußte der Schüler multipliciren?

78) Ein Kirchthurm ist 1 Jahr früher als das Rathhaus erbaut worden. Wenn man beide Jahreszahlen mit einander multiplicirt, so kommen 2419580. In welchem Jahre wurde der Kirchthurm aufgeführt?

79) Welche Zahl giebt, in **a** dividirt, einen Quotienten, welcher um 1 größer ist, als der durch die Division mit einer um **b** größern Zahl entstehende?

80) Die Summe zweier Zahlen ist $=8$. Dividirt man aber die Summen ihrer Quadrate durch die Differenz der Zahlen, so ergiebt sich 17. Welche Zahlen sind es?

81) Welche Zahl giebt, das eine Mal zu **a** das andere Mal zu **b** addirt, zwei Summen, von welchen die Kubikwurzel der ersten um **c** größer ist, als die Kubikwurzel der dritten.

82) In welche Theile muß man **a** zerlegen, damit die Summe der Kubikwurzeln derselben $=$**b** wird?

83) Welche Zahl giebt, zu ihrer Quadratwurzel addirt, die Summe **a**?

84) Welche Zahl ist es, deren 3ter Theil, mit ihrem Quadrate multiplicirt, die Zahl 1944 erzeugt?

85) Welche Zahl ist es, deren Hälfte, Drittel und Viertel mit einander multicirt, und das Product um 32 vermehrt, 4640 giebt?

86) Jemand kauft Citronen, die in eine gewisse Anzahl Schachteln gepackt sind, deren jede 3 mal so viel Citronen enthält, als Schachteln sind. Er bezahlt für jede Citrone doppelt so viel Pfennige, als Schachteln sind, und für alle insgesammt 57 Thlr. 4 Gr. Wie viele Citronen hatte er gekauft?

87) Einige Kaufleute verbinden sich zu einem Handelsgeschäfte; jeder giebt dazu 1000 mal so viele Thaler her, als ihrer sind. Sie gewinnen an diesem Geschäfte 2560 Thlr., und es findet sich, nach angestellter Rechnung, daß sie gerade halb so viel Procente gewonnen haben, als ihrer sind. Wie viele Kaufleute sind es?

88) Es werden drei Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht: Multiplicirt man das Quadrat der 1sten mit der 2ten, so erhält man 112; multiplicirt man das Quadrat der 2ten Zahl mit der 3ten, so ergiebt sich 588; und multiplicirt man das Quadrat der 3ten Zahl mit der 1sten, so bekommt man 576. Welche Zahlen sind es?

89) Jemand zapft von einem vollen Weinfasse, welches 81 Quart Wein enthält, eine gewisse Quantität ab. Nachdem er es hierauf wieder mit Wasser gefüllt hat, zapft er von dieser Mischung eben so viel als vorher ab; dies thut er viermal hinter einander, bis nicht mehr als 16 Quart reiner Wein im Fasse, das Uebrige aber Wasser ist. Wie viele Quart hat er jedesmal abgezapft?

90) Einige Officiere liegen mit einem Detachement theils Infanterie, und theils Kavallerie, zu Felde. Jeder Officier hat unter seinem Befehl 3 mal so viel Kavalleristen und 7 mal so viel Infanteristen, als Officiere sind. Jeder Kavallerist hat 2, und jeder Infanterist 22 Patronen mehr, als Officiere sind; insgesammt haben sie 15360 Patronen. Wie viel Officiere sind es?

91) Jemand wurde gefragt, wie viel er heute ausgegeben habe? — „Heute," gab er zur Antwort, „4 Thlr. mehr, und gestern doppelt so viel, als vorgestern; wenn ich die Summen, welche ich an diesen drei Tagen ausgegeben habe, nach Thalern gerechnet, mit einander multiplicire, und zum Produkte 756 addire, so erhalte ich gerade 134 mal so viel, als ich heute ausgegeben habe." Wie viel ist es demnach?

92) Einige Kaufleute legen eine gewisse Summe zusammen, und zwar jeder 10 mal so viel Thaler, als ihrer sind; handeln damit und gewinnen eine Anzahl Procente, welche um 8 größer als die Zahl der Kaufleute ist. Der Gewinn beträgt 288 Thlr. Wie viel Kaufleute waren vorhanden?

93) Jemand hat eine gewisse Anzahl Arbeiter, und zwar 3 mal so viel, als jeder täglich Groschen erhält. Sie arbeiten gemeinschaftlich 100 Tage weniger, als der Tagelohn aller zusammen an Groschen beträgt, und erhalten für diese Zeit insgesammt 2500 Thlr. Wie viel Arbeiter sind es? Und wie viel Tage haben sie gearbeitet?

94) Ein Wasserbehälter erhält seinen Zufluß aus 4 Röhren, und kann dadurch in $115\frac{1}{7}$ Minuten gefüllt werden. Soll aber der Behälter durch jede einzelne Röhre gefüllt werden, so erfordert die zweite 4, die dritte 8, und die vierte 12 Stunden mehr, als die erste. In welcher Zeit wird er demnach durch die erste gefüllt?

95) Es entstand ein Streit zwischen zwei Schwestern über ihr Alter. Die ältere sagte: wenn ich die Zahl meiner Jahre quadrire, und zu dem Produkte mein Alter und noch 100 Jahre addire, so kommt die Jahrzahl meines Geburtsjahres. Die jüngere erklärte sich, wenn ich die Zahl meiner Jahre kubire, und davon das Quadrat der Jahre meines Alters subtrahire, und zu solcher Differenz 380 addire, so kommt die Jahreszahl, worin ich geboren bin, 2 mal genommen. Und wenn die Jahreszahl der Geburt meiner Schwester von der Jahreszahl meiner Geburt abgezogen und der Rest noch um 10 Jahre vermindert wird, so entsteht die Summe meiner Lebensjahre. Wie alt ist jede dieser beiden Schwestern gewesen?

96) Ich zapfte von einem Fasse Wein 4 Maß, und goß dafür so viel Wasser hinein. Von diesem vermischten Weine nahm ich wieder 4 Maß, und goß dafür so viel Wasser zu. Eben das that ich zum dritten Male, und fand, daß nun $2\frac{1}{2}$ Maß mehr Wasser als Wein im Fasse seien. Wie viel ist daher anfangs im Fasse gewesen?

97) Es hat Jemand einige Arbeitsleute, von welchen jeder täglich so viel Groschen bekommt, als ihrer sind, und so viel Tage arbeitet, als sie insgesammt täglich Groschen bekommen, weniger einen Tag. In dieser Zeit verdienen sie insgesammt 180 Thlr. *) Wie viel waren der Arbeitsleute, und wie lange haben sie gearbeitet?

98) Vier Personen haben eine ungleiche Summe Geldes. **B** hat 1 Thlr. mehr als **A**, **C** 1 Thlr. mehr als **B**, und **D** 1 Thlr. mehr als **C**. Aller Geld mit einander multiplicirt, weniger 176, bringt eine Quadratzahl, deren Wurzel die Hälfte der subtrahirten Zahl ist. Wie viel hat Jede?

99) Man soll 2 Zahlen finden, deren Produkt 36 ist, und die

---

*) den Thaler zu 36 Groschen gerechnet.

Summe der Quadrate multiplicirt mit der Summe der Zahlen, 1261 bringt. Welches sind die Zahlen?

100) Welche Zahl ist es, deren Quadratwurzel, zu 4 addirt, doppelt so groß, als die Summe ihrer 3ten und 6ten Wurzel ist?

101) Eine Zahl zu finden, deren Quadrat- und Kubikwurzel addirt, die Summe 12 erzeugen?

102) Es giebt eine Zahl, welche zu 14 addirt, eine Summe liefert, die die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen dieser Zahl selbst und ihrem um 14 vermehrten Quadrate ist. Welche Zahl erfüllt diese Bedingung?

103) Eine Gesellschaft von 12 Personen verzehrt 6 Thlr., so daß also auf jedes Mitglied 12 Gr. kommen würden. Da aber einige Frauenzimmer in der Gesellschaft sind, und diese freigehalten werden sollen, so wird dem Wirth aufgetragen, zu berechnen, wie viel jede Mannsperson zu zahlen hat, und er erwiedert: Wären doppelt so viel Frauenzimmer hier, als wirklich hier sind, so müßte jede Mannsperson einen Groschen weniger als 3 mal so viel, wie wirklich Frauenzimmer sind, mehr bezahlen, als jetzt jede wirklich zu bezahlen hat. Wie viel Frauenzimmer sind in der Gesellschaft?

104) Welche Zahlen geben, zu ihrer Kubikwurzel addirt, die Summe 130?

105) Zwei Zahlen zu bestimmen, deren Summe ihrem Produkt gleich ist, und deren Quotient unverändert wieder entsteht, wenn man vom Zähler und Nenner $2\frac{1}{2}$ subtrahirt, und den so entstandenen neuen Quotienten quadrirt?

106) Zwei Zahlen zu bestimmen, deren Summe ihrer Quadrate **a** mal, und deren Summe ihrer Kubi **b** mal so groß, als ihre Summe selber ist?

107) Es giebt zwei Zahlen, deren **n** faches Produkt der Summe ihrer Quadrate, deren um **a** verminderte Summe aber der Wurzel aus dem Produkte beider Zahlen gleich ist. Welches sind die Zahlen?

108) Es giebt eine Zahl, welche um 2 vermindert ein vollkommenes Quadrat, um 2 vermehrt einen vollkommenen Kubus liefert; vermehrt man jede Wurzel um 1, so ist die erste Summe doppelt so groß wie die letztere. Welches ist die Zahl?

V. Unbestimmte oder diophantische Aufgaben.

109) Eine Bäuerin bringt Eier zu Markte, mehr als 100, aber weniger als 200. Sie ist unschlüssig, ob sie solche nach Mandeln oder Dutzenden verkaufen soll, denn im ersten Fall bleiben ihr 4, im zweiten gar 10 Eier übrig. Wie viele Eier hatte sie demnach?

110) Ein Knabe spielt mit Nüssen, deren Zahl zwischen 100 und 400 fällt, und will daraus einige Häufchen machen. Legt er 13 in jedes Häufchen, so bleiben ihm 9 übrig; legt er aber jedes 17, so bleiben ihm 14 übrig. Wie viel Nüsse sind es?

111) Welche Zahlen lassen durch 4, 6, 9, 15 dividirt, für die ersten drei Zahlen den Rest 3, und für die vierte den Rest 12?

112) Ein General wurde gefragt, wie stark sein Regiment sei. Er antwortete: „Mein Regiment, das beiläufig gesagt, keine 2000 Mann stark ist, kann ich zwar 5, 6 und 7 Mann hoch stellen, ohne daß mir einer übrig bleibt; wollte ich es aber 11 und 13 Mann hoch stellen, so würde ich im ersten Falle 9 Mann zu viel, und im zweiten 8 Mann zu wenig haben. Wie stark war das Regiment?

113) Ein Hauptmann wollte seine Compagnie, die zwischen 100 und 200 Mann hält, aufmarschiren lassen. Läßt er sie zu 2, 4, 8 und 10 Mann aufmarschiren, so bleibt ihm jedesmal 1 Mann übrig. Läßt er sie aber zu 6 oder 12 Mann aufmarschiren, so bleiben ihm jedesmal 5 übrig. Wie stark ist seine Kompagnie?

114) Es sollen drei Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß, wenn man die erste mit 7, die zweite mit 9 und die dritte mit 11 multiplicirt, das erste Produkt um 1 kleiner als das zweite, und um 2 größer, als das dritte sei. Welche Zahlen sind es?

115) In welche Theile muß man die Zahl 4890 zerlegen, wenn der erste Theil durch 37 dividirt den Rest 3, und der zweite durch 54 dividirt den Rest 6 geben soll?

116) Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen, zusammen für 1770 Thlr., und bezahlt für ein Pferd 31 Thlr., für einen Ochsen aber 21 Thlr. Wie viele Pferde und Ochsen hat er gekauft?

117) Man soll 100 in 3 Theile von solcher Beschaffenheit zerlegen, daß, wenn man den ersten mit 17, den zweiten mit 11, den dritten mit 3 multiplicirt, und hierauf die drei Produkte addirt, die Summe 880 sei. Welche Theile sind es?

118) Eine Bäuerin hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, zusammen 76 Stück, verkauft, eine Gans für 20, ein Huhn für $10\frac{1}{2}$, eine Ente für 7, und eine Taube für 4 Gr., und insgesammt 29 Thlr. 11 Gr. daraus gelöst. Wie viel Stück hat sie von jeder Gattung?

119) 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder, verzehren zusammen 58 Thlr.; ein Mann bezahlt 3 Thlr. 12 Gr., eine Frau 1 Thlr. 9 Gr. und ein Kind 6 Gr. Wie viel Männer, Weiber und Kinder waren es?

120) Es werden 2 Zahlen gesucht, deren Summe und Produkt gleich ist. Welche Zahlen sind es?

121) Es werden 2 ganze Zahlen gesucht, deren Summe und Product zusammengenommen 139 beträgt. Welche Zahlen sind es?

122) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Quadrate, wenn sie addirt werden, wieder eine Quadratzahl geben. Wie werden diese Zahlen gefunden?

123) Es sollen drei Zahlen von einer solchen Beschaffenheit gefunden werden, daß sowohl die Summe aller, als auch die Summe von zwei und zwei derselben eine vollkommne Quadratzahl sei. Welche Zahlen mögen dies wohl sein?

124) Wie heißen die Zahlen zwischen 1 und 1000, welche durch 6 dividirt keinen Rest, durch 7 dividirt 4 zum Rest, und durch 8 dividirt 2 zum Rest geben?

125) Eine Summe von 504 Thlr. wird mit 110 Goldstücken bezahlt, die aus Dukaten, Friedrichsd'or und Carolin bestehen; es wird hierbei der Dukaten zu $3\frac{1}{6}$ Thlr., der Friedrichsd'or zu $5\frac{2}{3}$ Thlr. und der Carolin zu $6\frac{1}{3}$ Thlr. angenommen. Aus wie viel Stücken einer jeden dieser drei Geldsorten besteht die Zahlung?

126) Der Weg von Frankfurt a. M. über Leipzig, Berlin, Bromberg und Königsberg in Preußen beträgt mehr als 100 und weniger als 200 Postmeilen. Legt ein Reisender täglich 12 Meilen zurück, so braucht er am letzten Tage nur noch 9 Meilen zurückzulegen; reist er täglich 11 Meilen, so bleiben ihm für den letzten Tag 10 Meilen übrig; wählt er Tagereisen von 10 Meilen, so bleiben ihm zuletzt 3 Meilen übrig. Wie viel Postmeilen sind es?

127) Zwei positiv ganze Zahlen dergestalt zu finden, daß, wenn die eine zum Quadrat der andern addirt wird, ein Quadrat entsteht, dessen Wurzel die Differenz beider Zahlen ist.

128) Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. **A** spricht, wenn ich die Meinigen zu 8 zähle, so bleiben 7 übrig; **B** sagt: wenn ich die Meinigen zu 10 zähle, so bleiben ebenfalls 7 übrig. Wie viel Eier hatte eine jede?

129) Ein Kaufmann will für 100 Thlr. Saffran, Zimmt, Thee und Kaffee einkaufen, doch so, daß er immer 100 Pfund bekommt. Nun kostet 1 Pfd. Saffran 10 Thlr., 1 Pfd. Zimmt 5 Thlr., 1 Pfd. Thee 2 Thlr. und 1 Pfd. Kaffee $\frac{1}{2}$ Thlr. Wie viel Pfund wird er von jeder Sorte bekommen?

130) Fünf Taschenuhren werden auf folgende Art tarirt: Man legt einen diamantnen Ring auf die erste Uhr, dann ist der Werth derselben gegen die andere wie 2:1; auf die zweite gegen die dritte wie 5:2; auf die dritte gegen die vierte wie 4:1; auf die vierte gegen die fünfte wie 5:8. Was gilt der Ring und jede Uhr?

VI. Aufgaben über Progressionen.

131) Ein Herr miethet einen Bedienten und verspricht ihm an Lohn das erste Jahr 30 Thlr., und für jedes folgende Jahr $4\frac{1}{2}$ Thlr. mehr als für das vorhergehende. Wie viel wird der Bediente für das 17te Jahr nach dem Antritte seines Dienstes, und wie viel für alle 17 Jahre erhalten?

132) Ein Reisender, der in 19 Tagen an seinem Bestimmungsorte zu sein wünscht, beschleunigt seine Reise so sehr, daß er jeden Tag eine Viertelmeile mehr macht, als den vorhergehenden. Wenn er nun den letzten Tag $14\frac{1}{2}$ Meilen zurücklegt, wie viel Meilen machte er den ersten Tag? Und wie viele Meilen beträgt seine ganze Reise?

133) Jemand, der nach seinem Gehalte gefragt wurde, antwortete: „Jetzt habe ich 550 Thlr.; beim Antritte meines Amtes hingegen hatte ich nicht mehr als 100 Thlr., erhielt aber, meines Fleißes wegen, jedes Jahr eine Zulage von 30 Thlr." Wie lange ist dieser Mann schon im Amte?

134) Die Physik lehrt, daß jeder Körper, der im luftleeren Raume fällt, in der ersten Sekunde seines Fallens einen Raum von ohngefähr $15\frac{5}{8}$ Fuß und in jeder folgenden Sekunde $31\frac{1}{4}$ Fuß mehr als in der zunächst vorhergehenden durchläuft. Wenn nun ein Körper 20 Sekunden gefallen ist, wie viel Fuß wird er in der letzten Sekunde, und wie viel in der ganzen Zeit zurücklegen?

135) Jemand sieht in einem Zeughause 15 Reihen Kanonenkugeln über einander liegen, und fragt einen neben ihm stehenden Bombardier: wie viel Kugeln in der untersten von diesen Reihen wären? „Das können Sie leicht berechnen," erwiederte der Bombardier, „es liegen in allen diesen Reihen zusammen 4200 Kugeln, und jede Reihe, von der ersten bis zur letzten, enthält immer 20 Kugeln weniger als die, welche unter ihr liegt." Wie viele Kugeln liegen demnach in der untersten Reihe?

136) Eine Kompagnie wurde für die gelungene Bestürmung einer Festung so belohnt, daß derjenige Soldat, welcher den Wall am ersten erstiegen hatte, eine gewisse Summe Geldes erhielt, der zweite um etwas weniger, der dritte gerade um eben so viel weniger als der zweite u. s. w. Als das Geld ausgetheilt wurde, konnten zwei dieser Soldaten wegen ihrer Blessuren nicht zugegen sein; man gab daher ihren Antheil zweien ihrer Kameraden. Diese zwei steckten sowohl ihr eigenes Geld, als auch jenes ihrer zwei Kameraden in einen einzigen Sack zusammen, und wußten nachher bei der Theilung nicht mehr, was jedem gebühre. Der eine hatte für

sich und seinen Kameraden 92 Thlr. erhalten, und erinnerte sich nur noch, daß er der zweite und sein blessirter Kamerad der siebente gewesen sei; der andere hatte für sich und seinen Kameraden 71 Thlr. erhalten, und wußte, daß er der elfte, sein Kamerad aber der vierte gewesen sei. Wie viel gebührt nun jedem dieser 4 Soldaten?

137) Zwei Personen reisen, einer Zusammenkunft halber, zu gleicher Zeit und auf derselben Tour von zwei Oertern, **A** und **B**, ab, welche 170 Meilen von einander entfernt liegen. Der von **B** abgegangene macht regelmäßig täglich 4 Meilen; der andere aber den ersten Tag nur 2 Meilen, jeden folgenden Tag jedoch unausgesetzt eine halbe Meile mehr als an dem vorhergehenden. Wo werden sie zusammen kommen?

138) Bei einem Scheibenschießen sollen 35 Thlr. unter die 5 besten Schützen vertheilt werden, so daß der vorzüglichste unter ihnen 11 Thlr. und der folgende immer gleich viel Thaler weniger, als der zunächst vorhergehende erhalte. Wie viel bekam der letzte und wie groß ist der Unterschied in den einzelnen Preisen?

139) Es hatte Jemand einen Brunnen graben lassen und bezahlte für den ersten Fuß 1 Thlr., für jeden folgenden $\frac{1}{3}$ Thlr. mehr als für den vorhergehenden; im Ganzen 671 Thlr. Wie tief war der Brunnen?

140) Ein Schuldner wurde mit Execution belegt, die in 8 Tagen 164 Thlr. kostete. Täglich wurden die Executions-Gebühren um etwas Bestimmtes erhöhet, so daß er am letzten Tage 38 Thlr. zahlen mußte. Wie viel zahlte er am ersten Tage, und um wie viel vermehrten sich die Executions-Gebühren täglich?

141) Ein Knabe hat einen Korb, in den er 12 Steine sammeln soll, von welchen der nächste 6 Schritt, der zweite 10 Schritt, und so ein jeder vom Korbe 4 Schritte weiter entfernt liegt. Wenn nun der Knabe jeden Stein einzeln zum Korbe bringen soll, wie viele Schritte wird er machen müssen?

142) Ein Kourier soll in 9 Tagen 108 Meilen zurücklegen. Er Er reitet jeden Tag $\frac{1}{2}$ Meile mehr als am vorhergehenden. Wie viel Meilen hat er am letzten Tage gemacht?

143) Der Unterschied einer arithmetischen Progression von 4 Gliedern ist $= d$, und das Produkt aller Glieder derselben $= \mathbf{a}$. Wie findet man das 1ste Glied?

144) Der Unterschied einer arithmetischen Progression von 6 Gliedern ist $= d$; das Produkt aller Glieder derselben $= \mathbf{a}$. Wie findet man das erste Glied?

145) Jemand setzt 6 Pf. in die Lotterie, und da er das erste Mal nicht gewinnt, so setzt er das zweite Mal 1 Gr. 6 Pf., und und da er auch dies Mal nicht gewinnt, das dritte Mal

4 Gr. 6 Pf., kurz bei jedem neuen Einsatze immer 3 mal so viel als bei dem vorhergehenden. Wie viel wird er, wenn er so fortfährt, das zwölfte Mal setzen? Und wie viel muß er alsdann gewinnen, wenn er alles Geld, das er bis dahin gesetzt hat, wieder erhalten will?

146) Ein König in Indien, Namens Sheran, verlangte, nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers Asephad, daß Sessa, der Erfinder des Schachspiels, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Weizenkörner, die herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbretes, 2 für das zweite, 4 für das dritte, und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viele Körner als für das vorherhergehende gerechnet werden. Als gerechnet wurde, fand man zum Erstaunen des Königs, eine ungeheure Summe. Welche?

147) Jemand säete eine Metze Weizen aus, und benutzte die ganze Ernte zur Aussaat für das folgende Jahr; die Ernte dieses zweiten Jahres wieder zur Aussaat für das dritte Jahr, ꝛc. Wenn er nun im zehnten Jahre 1048576 Metzen erntet, um wie viel Mal hat sich das Saatkorn bei jeder Ernte vermehrt, wenn diese Vermehrung immer dieselbe blieb?

148) In einem ruhigen und friedlichen Ländchen vermehrte sich die Volksmenge alle Jahre in einem immer gleichen Verhältnisse, und zwar so stark, daß die Bevölkerung in einem Zeitraume von vier Jahren von 10000 auf 14641 Seelen anwuchs. Um welchen Theil nahm die Volksmenge jährlich zu?

149) Es giebt 7 Zahlen, die eine geometrische Progression bilden und so beschaffen sind, daß, wenn man die ersten 6 addirt, die Summe $157\frac{1}{2}$, wenn man aber die letzten 6 addirt, die Summe 315 herauskommt. Welche Zahlen sind es?

150) Die Summe dreier in geometrischer Progression stehender Zahlen beträgt 35; die mittlere verhält sich zur Differenz der äußern wie 2 zu 3. Welche Zahlen sind es?

151) Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; die größte übertrifft die kleinste um 15. Die Differenz von den Quadraten der größten und kleinsten verhält sich zur Summe der Quadrate aller 3 Zahlen wie 5 zu 7. Welche Zahlen sind dies?

152) Die Summe dreier in geometrischer Progression stehender Zahlen ist 13, das Produkt der mittlern in die Summe der äußern beträgt 30. Welche Zahlen sind dies?

153) Jemand bezahlt für ein erhaltenes Pferd in der ersten Stunde 1 Pfennig, in der zweiten 2 Pf., in der dritten 4 Pf. ꝛc., also in jeder nächstfolgenden Stunde doppelt so viel, als in der vorhergehenden, und das 24 Stunden lang. Wie theuer war das Pferd?

154) Man will ein Kapital von 300 Thlr. in 4 Terminen und in jedem folgenden Termine die Hälfte des vorhergehenden bezahlen. Wie viel muß das erste Mal bezahlt werden?

155) In einer geometrischen Progression von 5 Gliedern ist die Summe der geraden Glieder = a, und die Summe der ungeraden = b. Welche Progression ist es?

156) Die Summe der geraden Glieder einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist = a, die Summe der ungeraden Glieder = b; welche Progression ist es?

157) In einer geometrischen Progression kennt man die Summe der Glieder = a, die Summe ihrer Quadrate = b, und die Summe ihrer Cuben = c; wie wird sie gefunden?

158) In einer geometrischen Progression ist die Summe der Glieder = a, die Summe ihrer Quadrate = b, und die Summe ihrer Biquadrate = c; wie wird sie gefunden?

VII. Aufgaben für die Permutationen u. s. w.

159) Wie oft können 8 neben einander stehende Personen ihre Plätze wechseln, d. h. so verändern, daß sie jedesmal eine andere Ordnung beobachten?

160) Wie oft können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

161) Wie viele Complexionen giebt es unter den sämmtlichen Versetzungen von a b c d e f g, welche mit einem von den Buchstaben a, b, c, d, e, f, g anfangen?

162) Wie viel beträgt die Summe der Ziffern in allen Versetzungen der Zifferncomplexion 12234 zusammen genommen?

163) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen und Quinten sind in 90 Nummern enthalten?

164) Aus einem Piketspiele von 32 gemischten Karten soll man blindlings und ohne zu wählen 15 Blätter herausziehen. Auf wie viel gleich mögliche Arten können die gezogenen Karten zusammengesetzt sein?

165) Auf wie viele Arten lassen sich 40 verschiedene Kugeln in 2 Haufen abtheilen, so, daß der eine 33 und der andere 7 Kugeln enthält?

166) Im Piketspiele bekommt jeder von den beiden Spielenden 12 Karten, und die übrigen 8 werden als Kaufkarten zurückgelegt. Wie viel verschiedene Spiele sind nun bei der Austheilung der Karten möglich?

167) Auf wie viel Arten können die 52 Kartenblätter des ganzen Spiels unter die 4 Whistspieler ausgetheilt werden; oder: auf wie viele Arten können diese 52 Karten in 4 gleiche Theile, von welchen jeder 13 Karten enthält, eingetheilt werden?

VIII. Aufgaben für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

168) Wenn unter n möglichen Fällen, wie eine Begebenheit sich ereignen kann, es m Fälle giebt, welche irgend einer darauf gegründeten Hoffnung oder Erwartung günstig sind, und also n — m Fälle, wo ein ungünstiger Erfolg eintritt, welche Wahrscheinlichkeit W ist alsdann für einen günstigen, und welche W_1 für einen ungünstigen Fall vorhanden?

169) Wenn n die Anzahl der einem Ereignisse günstigen und m die Anzahl der demselben ungünstigen Fälle bezeichnet, wie groß sind alsdann W und W_1?

170) Aus den Wahrscheinlichkeiten W', W'', W''', u. s. w. mehrer Ereignisse die Wahrscheinlichkeit W für das Eintreffen irgend eines dieser Ereignisse zu bestimmen.

171) Die Wahrscheinlichkeiten W', W'', W''' u. s. w. mehrer Ereignisse sind bekannt; man soll die Wahrscheinlichkeit W_1, daß keines dieser Ereignisse eintreten werde, angeben.

172) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß sich zwei Begebenheiten, deren eine die Wahrscheinlichkeit W', und deren andere die Wahrscheinlichkeit W'' für sich hat, zugleich ereignen?

173) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß mehre Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten W', W'', W''' u. s. w. man kennt, zugleich zusammentreffen?

174) Den Werth G eines zu erwartenden Gewinnes zu ermitteln, wenn die zu erwartende Summe S und die Wahrscheinlichkeit W, die Summe S zu erhalten, bekannt sind *).

175) Es sind mehre zu erwartende Summen S', S'', S''' u. s. w., so wie die denselben entsprechenden Wahrscheinlichkeiten W', W'', W''' u. s. w. angegeben; man soll den von allen diesen Ereignissen zu erwartenden Gewinn G, d. h. die mathematische Hoffnung, angeben.

176) Bei einer Wette im engern Sinne hat die erste Parthie die Wahrscheinlichkeit W, die Menge M', und die zweite die Wahrscheinlichkeit W', die Menge M zu gewinnen; man soll eine Gleichung zwischen M, W und M' ermitteln *).

177) Die Wahrscheinlichkeiten W und W_1 anzugeben, so daß man, sobald in eine n Kugeln enthaltende Urne gefaßt wird, entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl Kugeln ergreift.

178) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß man beim Ziehen irgend einer geraden Anzahl von Kugeln aus einer Urne,

---

*) G wird die Erwartung oder mathematische Hoffnung genannt.

**) wenn man $W' = 1 - W$ voraussetzt.

die n weiße und n schwarze Kugeln enthält, gleich viel weiße und schwarze Kugeln ergreift?

179) Ein Lotto enthält n Nummern, von denen r Nummern gezogen werden. Man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß von s besetzten Nummern t herauskommen.

180) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß von n Nummern eines Lotto's in einer Ziehung von r Nummern s bestimmte Nummern herauskommen?

181) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß von den n Nummern eines Lotto's unter r gezogenen Nummern s bestimmte Nummern in einer bestimmten Ordnung gezogen werden?

182) Ein Lotto enthält n Nummern. Man soll die Wahrscheinlichkeit W angeben, daß in i Ziehungen von r Nummern q bestimmte Nummern alle herauskommen, wenn $i . r \overline{\overline{>}} q$ sich zeigt.

183) Eine Urne enthält N weiße und eine andere Urne N schwarze Kugeln. Man zieht aus einer dieser Urnen eine Kugel, wirft diese in die andere Urne, und zieht hierauf aus dieser wieder eine Kugel. Ein Zeuge sagt nun, in der ersten Ziehung sei eine weiße Kugel, und ein zweiter Zeuge, in der zweiten sei ebenfalls eine weiße Kugel gezogen worden. Welches ist nun die Wahrscheinlichkeit W, daß in beiden Ziehungen wirklich eine weiße Kugel ergriffen worden sei?

184) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei gewöhnlichen Würfeln 1 und 2, ferner einen Pasch zu werfen?

185) Wie groß ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, mit zwei gewöhnlichen Würfeln 3 und 4 zu werfen?

186) Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, mit zwei gewöhnlichen Würfeln 7, 8 oder 9 zu werfen?

187) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei gewöhnlichen Würfeln nicht 7 oder 8 zu werfen?

188) Drei Boten, A, B, C, gehen gleichzeitig von einem gewissen Orte ab. Wenn nun die Wahrscheinlichkeit, daß A nach 2 Tagen in P eintrifft, $=\frac{1}{7}$, die Wahrscheinlichkeit, daß B nach 3 Tagen in Q ankommt, $=\frac{2}{5}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß C in $2\frac{1}{2}$ Tag in Q eintrifft, $=\frac{3}{10}$ beträgt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese drei Ereignisse wirklich stattfinden?

189) Eine Urne enthält 9 Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus dieser Urne eine gerade Anzahl von Kugeln zu ziehen?

190) A wettet, auf den ersten Wurf mit zwei gewöhnlichen Würfeln einen Pasch zu werfen, und setzt 1 Thlr.; B wettet dagegen. Wie viel kann B für seine Wette sicher einsetzen?

191) In der ehemaligen Berliner Zahlenlotterie wurden von 90 Num-

mern, welche man in ein Rad legte, und vermittelst der Umdrehung durch einander mischte, 5 als Treffer gezogen. Wenn nun Jemand 12 aus diesen 90 Nummern nach Willkür wählte, und alle darin enthaltenen Amben, Ternen, Quaternen und Quinten besetzte, wie groß war für ihn die Wahrscheinlichkeit, eine Ambe, Terne, Quaterne oder Quinte zu gewinnen?

192) In einem Kasten befinden sich 24 Kugeln, nämlich 6 weiße, 8 schwarze und 10 rothe. Es sollen zuerst 7 Kugeln, und hierauf, von den noch übrigen 17 Kugeln, wieder 3 Kugeln blindlings herausgezogen werden. Ich setze darauf, daß die 7 Kugeln alle roth, und die 3 Kugeln alle weiß sein werden. Wie groß ist meine Wahrscheinlichkeit zu gewinnen?

193) Ist es wahrscheinlicher mit 3 Würfeln 2 Sechsen zu werfen, oder aus einem gemischten Piketspiele 3 Karten von einer Farbe, blindlings und ohne zu wählen, herauszuziehen?

Resultate.

1) 355; 2) 12; 3) 444; 4) 1 Thlr.; 5) $[(b-c)^2 . m^2 - a] . n$; 6) $\frac{a^3}{1+a^2}$ und $\frac{a}{1+a^2}$; 7) $\frac{a}{5}$ und $\frac{4a}{5}$; 8) 7; 9) um $\frac{n-1}{a} . 100b$; 10) $\frac{abcdn}{bcn + acn + abn - abc}$; 11) B ist jetzt $\frac{m-1}{m-n} . p$, und A ist jetzt $\frac{m-1}{m-n} . np$ Jahre alt; 12) B ist jetzt $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - p$ und A $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - p$ Jahre alt; 13) Er hatte $\frac{e^2+2e+3}{e^3-n} . be$ Thlr., wenn $e = \frac{100+P}{100}$ ist; 14) der erste 180, der zweite 120 Thlr.; 15) A hat 500 und B 700 Thlr.; 16) A hat 250, B 320 Thlr.; 17) zu $4\frac{1}{2}\%$ und $5\frac{1}{2}\%$; 18) die erste Oeffnung giebt 15, die zweite 6 Eimer in einer Stunde, und 10 Stunden werden zur Füllung des Behälters erfordert; 19) $\frac{4}{15}$; 20) A hat 10000, B 22600, C 13000 Thlr. ausgeliehen, A zu 4, B zu 5 und C zu 6%; 21) 29 Zeilen und 32 Buchstaben; 22) in dem ersten 22, und in dem zweiten 10 Quart; 23) 2 und 10; 24) 5 und 8; 25) $\frac{1}{8}$ Loth; 26) A nahm 11 und B 9 Karten; 27) 45 Truthühner und 60 Gänse; 28) 12 Ruthen lang und 9 Ruthen breit; 29) A 400, B 640 und C 780 Thlr.; 30) das 15löthige wiegt 8, das 10löthige 16, und das 9löthige 10 Mark; 31) der Dukaten

zu 3 Thlr. 2 Gr., der Friedrichsd'or zu 5 Thlr. 14 Gr. und der Karolin zu 6 Thlr. 2 Gr.; **32)** **A** braucht 20, **B**. 30 und **C** 60 Tage, und alle Drei haben 10 Tage dazu nöthig; **33)** **A** braucht 105, **B** 210, **C** 420 Minuten, und alle drei Röhren erfordern 1 Stunde, um den Wasserbehälter zu füllen; **34)** Von dem ersten 10, von dem zweiten 24 und von dem 3ten 25 Loth; **35)** **A** 75, **B** 63 und **C** 54 Dukaten; **36)** das erste 780, das zweite 1716 und das dritte 2028 Mann; **37)** 37, 25 und 21; **38)** 432; **39)** die erste Stadt hat 45000, die zweite 32500 und die dritte 14500 Einwohner; **40)** auf dem ersten Platz 15, auf dem zweiten 9 und auf dem dritten 6 Gr.; **41)** Genf; **42)** Paris; **43)** **A** hatte 81, **B** 41, **C** 21, **D** 11 und **E** 6 Thlr. vor dem Spiele; **44)** 40; **45)** 23 Thlr. **46)** 54 Thlr. und 27 Arme; **47)** 4550 Mann; **48)** 126 Meilen; **49)** **A** 40 und **B** 60 Eier; **50)** 8 und 7; **51)** von der ersten 15, von der zweiten 20 und von der dritten 70 Pfund; **52)** die erste 80 und die zweite 60 Pfd.; **53)** 122 Tücher; **54)** 54 Arme; **55)** 8 Männer; **56)** 80 Thlr.; **57)** die eine 80 und die andere 60 Eier; **58)** 150 Meilen; **59)** der eine 200 und der andere 300 Thlr.; **60)** 150 Thlr.; **61)** 1296; **62)** $56\frac{1}{4}$; **63)** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; **64)** 862; **65)** 90 Thlr.; **66)** 28 und 36 Bäume; **67)** 18 Personen; **68)** **A** 117, **B** 130 Meilen; **69)** 20, 16 und 12 Fuß; **70)** 6, 8, 10 Fuß; **71)** 4 Rechenpfennige; **72)** im großen Haufen 6, im kleinen 4 Karten, im großen Haufen 22 und im kleinen 33 Augen; **73)** der Umfang des einen 15 u. der des andern 12 Fuß; **74)** **A** brauchte 11 Tage und machte täglich 35 Meilen, **B** brauchte 6 Tage und machte täglich 21 Meilen; **75)** Bacchus in 6 und Silen in 3 Stunden; **76)** der erste Hauptmann hatte 120 u. der andere nur 80 Soldaten; **77)** 159 und 234; **78)** im Jahre 1555; **79)** die Zahl $\frac{-b \pm \sqrt{b(4a+b)}}{2}$; **80)** 5, 3;

81) die Zahl $\left(-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{4(a-b)-c^3}{12c}}\right)^3 - b$,

oder $-\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b+2c^3}{3c}\sqrt{\frac{4(a-b)-c^3}{12c}}$ und die beiden Kubikwurzeln sind $+\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{4(a-b)-c^3}{12c}}$ und

$-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{4(a-b)-c^3}{12c}}$; **82)** in die Theile $\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{4a-b^3}{12b}}\right)^3$

und $\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{4a-b^3}{12b}}\right)^3$, beide Theile sind auch noch so auszudrücken: $\frac{a}{2} + \frac{2b^3+a}{3b} \cdot \sqrt{\frac{4a-b^3}{12b}}$ u. $\frac{a}{2} - \frac{2b^3+a}{12b} \cdot \sqrt{\frac{4a-b^3}{12b}}$;

83) die Zahl $\left(\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}\right)^2$ oder $\frac{1+2a\mp\sqrt{1+4a}}{2}$; 84) 18; 85) 48; 86) 588; 87) 8 Kaufleute; 88) 4, 7, 12; 89) 27 Quart; 90) 8 Officiere; 91) 6 oder 9 Thlr.; 92) 12 Kaufleute; 93) 30 Arbeiter und 200 Tage; 94) in 4 Stunden; 95) die ältere 40 und die jüngere 15 Jahre; 96) 16 Maß; 97) 9 Arbeitsleute, die 80 Tage gearbeitet haben; 98) A 8, B 9, C 10 und D 11 Thlr.; 99) 4 und 9; 100) 8 und auch 64 *); 101) 64, $27.\frac{11-3\sqrt{-15}}{2}$ und $27.\frac{11+3\sqrt{-15}}{2}$ **); 102) 7, $-3+\sqrt{-19}$ und $-3-\sqrt{-19}$; 103) 3 Frauenzimmer; 104) 125, $\frac{265+\sqrt{-79}}{2}$ und $\frac{265-\sqrt{-79}}{2}$; 105) 5 und $\frac{5}{4}$;

106) die Summe der beiden Zahlen ist $\frac{3a+\sqrt{9a^2-8b}}{2}$ ihr Produkt $\frac{3a^2-2b+a\sqrt{a^2-8b}}{2}$, und die Zahlen selbst sind

$$\frac{3a+\sqrt{9a^2-8b}+2\sqrt{8b-6a^2-2a\sqrt{9a^2-8b}}}{4} \text{ und}$$

$$\frac{3a+\sqrt{9a^2-8b}-2\sqrt{8b-6a^2-2a\sqrt{9a^2-8b}}}{4};$$

107) $a.\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+2}-1}$ und $a.\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+2}-1}$;

108) 123; 109) 154; 110) 269; 111) 147, 327, 507, 687, 867 rc., überhaupt alle Zahlen von der Form 180n+147; 112) 1890 Mann; 113) 161 Mann; 114) 5, 4, 3, oder 104, 81, 66, oder 203, 158, 129 rc.; 115) in 780 und 4110, oder in 2778 und 2112, oder in 4776 und 114; 116) 9 und 71, oder 30 und 40, oder 51 und 9; 117) 2, 69, 29, oder 6, 62, 32, oder 10, 55, 35 rc.; 118) 2 Gänse, 46 Hühner, 24 Enten,

---

*) Bezeichnet man nämlich die unbekannte Zahl durch x, so ergiebt sich:

$$\sqrt[3]{x}+4=2(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}),$$

$$\text{oder } \sqrt[6]{x}(\sqrt[6]{x}-2)-2(\sqrt[6]{x}-2)=0,$$

$$\text{oder } (\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[6]{x}-2)=0 \text{ rc.}$$

**) Setzt man nämlich die unbekannte Zahl = x und $\sqrt[3]{x}=y$, so erhält $y^3-y^2+24y-144=0$; und hieraus für y die 3 Werthe + 4, $+3.\frac{-1+\sqrt{-15}}{2}$, und $+3.\frac{-1-\sqrt{-15}}{2}$ rc.

4 Tauben, oder 10 Gänse, 30 Hühner, 16 Enten, 20 Tauben ꝛc.; **119)** 10 Männer, 16 Weiber und 4 Kinder: **120)** bezeichnen x und y die beiden Zahlen, so ist x willkürlich und $y = \frac{x}{x - 1}$; **121)** 1 und 69, 3 und 34, 4 und 27, 6 und 19, 9 und 13; **122)** bezeichnen p und q zwei willkürliche Zahlen, so ist die eine von den gesuchten Zahlen $= p^2 - q^2$ und die andere $= 2pq$; **123)** 41, 80, 320 oder 22, 42, $68\frac{1}{4}$, ꝛc; **124)** 18, 186, 354, 522, 690, 858; **125)** 56 Dukaten, 30 Friedrichsd'or und 24 Carolin; **126)** 153 Postmeilen; **127)** die eine Zahl ist 1, 2, 3, 4 ꝛc. oder $n + 1$, und die andere 3, 5, 7, 9 ꝛc. oder $2n + 3$; **128)** A 63 oder 23, und B 37 oder 77;

129)

Saffran	1,	1,	1 ꝛc.	2,	2,	2 ꝛc.	
Zimmt	1,	2,	3 ꝛc.	1,	2,	3 ꝛc.	, ꝛc.
Thee	72,	63,	54 ꝛc.	53,	44,	35 ꝛc.	
Kaffee	26,	34,	42 ꝛc.	44,	52,	60 ꝛc	

130) Es kann werth sein

die 1te Uhr	12,	12,	12 ꝛc.	24,	24,	24 ꝛc.	
" 2te "	29,	54,	79 ꝛc.	33,	58,	83 ꝛc.	
" 3te "	30,	60,	90 ꝛc.	30,	60,	90 ꝛc.	
" 4te "	19,	39,	59 ꝛc.	18,	38,	58 ꝛc.	, ꝛc.
" 5te "	104,	216,	328 ꝛc.	96,	208,	320 ꝛc.	
der Ring	46,	96,	146 ꝛc.	42,	92,	142 ꝛc.	

131) 102 Thlr. und 1122 Thlr.; **132)** 10 Meilen und $232\frac{3}{4}$ Meilen; **133)** 16 Jahre; **134)** $609\frac{3}{8}$ Fuß und 6250 Fuß; **135)** 470 Kugeln; **136)** dem 2ten $54\frac{3}{4}$, dem 4ten $47\frac{3}{4}$, dem 7ten $37\frac{1}{4}$ und dem 11ten $23\frac{1}{4}$; **137)** 120 Meilen von A; **138)** der letzte erhielt 3 Thlr., und der Unterschied in den einzelnen Preisen betrug 2 Thlr.; **139)** 61 Fuß; **140)** 3 Thlr., und um 5 Thlr. vermehrten sich die Executions-Gebühren täglich; **141)** 672 Schritte; **142)** 14 Meilen; **143)** ist das erste Glied $= x$, das Produkt der beiden äußern Glieder $= y$, so folgt $x^2 + 3dx = y$, und die Unbekannte y ist durch die Gleichung $y^2 + 2d^2y = a$ gegeben; hieraus erhält man aber folgende 4 Werthe von x:

$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}d^2 - \sqrt{a + d^4}}$, und $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}d^2 - \sqrt{a + d^4}}$;

144) Ist das 1ste Glied $= x$, das Produkt der beiden äußern Glieder $= y$, so ist $x^2 + 5dx = y$, und y durch die Gleichung $y^3 + 10d^2y^2 + 24d^4y = a$ gegeben ꝛc.; **145)** 3690 Thlr. 13 Gr. 6 Pf. und 5535 Thlr. 20 Gr.; **146)** 18446744073709551615 *); **147)** 4 mal; **148)** um den 10ten Theil; **149)** $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160; **150)** 5, 10, 20; **151)** 5, 10, 20; **152)** 1, 3, 9;

---

*) Eine Summe, welche auf der ganzen Erde, nach einer mäßigen Berechnung, erst in mehr als 70 Jahren gewonnen werden könnte, wenn man alles feste Land zum Anbau von Weizen benutzte.

153) 58254 Thlr. 5 Gr.; 154) 160 Thlr.; 155) sind A, B, C, D, E die 5 Glieder der gesuchten Progression, so ist

$$C = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}, \; B = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4C^2}}{2},$$

$$E = \frac{(a + \sqrt{a^2 - 4C^2})^2}{4C}, \; A = \frac{(a - \sqrt{a^2 - 4C^2})^2}{4C},$$

$D = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4C^2}}{2}$; 156) der Faktor der Progression ist $= \frac{a}{b}$, das erste Glied $= \frac{b^3}{a^2 + b^2}$, woraus sie sich finden läßt; 157) der Faktor d der Progression ist

$$= \frac{a^4 + 2ac - 3b^2 \pm \sqrt{12a(ac - b^2)(a^3 - c)}}{a^4 + 3b^2 - 4ac},$$

das erste Glied $= \frac{b(1+d) + a^2(1-d)}{2a}$, ꝛc.; 158) der Faktor der Progression ist $= \frac{a^4 b - b^3 \pm 2a\sqrt{(c - a^2 b)(b^3 - a^2 c)}}{b^3 + a^4 b - 2a^2 c}$, das 1ste Glied $= \frac{b(1+d) + a^2(1-d)}{2a}$ ꝛc.; 159) 40320 mal; 160) 620448401733239439360000 *); 161) 720; 162) 720; 163) 4005 Amben, 117480 Ternen, 2555190 Quaternen, und 43949268 Quinten; 164) auf 565722720 Arten; 165) 18643560 Arten; 166) 28443124054800; 167) auf 5364473776548879283923744 0000 Arten;

168) es ist $W = \frac{m}{n}$ und $W_1 = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - W$ **);

169) $W = \frac{n}{n+m}$, $W_1 = \frac{m}{n+m}$; 170) Es ist $W = W' + W'' + W''' + \ldots$; 171) es ist $W_1 = 1 - (W' + W'' + W''' + \ldots)$; 172) $W = W' . W''$; 173) $W = W' . W'' . W''' \ldots$; 174) $G = SW$; 175) $G = S' . W' + S''W'' + S'''W''' + \ldots$, wenn man einen etwaigen Verlust stets als einen negativ zu erwartenden Gewinn in Rechnung bringt; 176) $M(1 - W) = M'W$; 177) $W = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergreifen

*) Alle Menschen auf der ganzen Erde würden, nach einer ohngefähren Berechnung, nicht in 1000 Millionen Jahren alle Versetzungen der 24 Buchstaben schreiben können, wenn auch jeder täglich 40 Seiten schriebe, deren jede 40 verschiedene Versetzungen der Buchstaben enthält.

**) Die durch W_1 bezeichnete Ergänzung der Wahrscheinlichkeit wird auch die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit genannt.

einer geraden Anzahl Kugeln, und $W_1 = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergreifen einer ungeraden Anzahl Kugeln;

178) $$W = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^2} - 1}{2^{2n-1} - 1};$$

179) $$W = \frac{(n-s)\ldots(n-s-r+t+1)\,s\ldots(s-t+1)\,r\ldots(r-t+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots t\,n(n-1)\ldots(n-r+1)};$$

180) $$W = \frac{r \cdot (r-1)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)};$$

181) $$W = \frac{r \cdot (r-1)\ldots(r-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s\,n(n-1)\ldots(n-s+1)};$$

182) $$W = 1 - q \cdot \left(\frac{n-r}{n}\right)^i + \frac{q \cdot (q-1)}{2} \cdot \left[\frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\right]^i - \frac{q(q-1)(q-2)}{2 \cdot 3} \cdot \left[\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{n(n-1)(n-2)}\right]^i$$
$$+ (-1)^{q-1} \cdot \frac{q(q-1)\ldots 2}{2 \cdot 3 \ldots (q-1)} \cdot \left[\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-q+2)}{n \cdot (n-1)\ldots(n-q+2)}\right]^i$$
$$+ (-1)^q \cdot \frac{q(q-1)\ldots 1}{2 \cdot 3 \ldots q} \cdot \left[\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-q+1)}{n(n-1)\ldots(n-q+1)}\right]^i;$$

183) Bezeichnen q und q^1 die Wahrscheinlichkeiten, daß beide Zeugen die Wahrheit gesagt haben, so ist $W = \frac{q \cdot q^1}{Q + (1-Q)N}$, wenn man $qq^1 + (1-q)(1-q^1)$ durch Q ausdrückt; 184) $\frac{1}{18}$ und $\frac{1}{6}$; 185) $\frac{17}{18}$; 186) $\frac{5}{12}$; 187) $\frac{25}{36}$; 188) $\frac{3}{175}$; 189) $\frac{255}{511}$; 190) 5 Thlr.; 191) für die Ambe $= \frac{44}{267}$, für die Terne $= \frac{5}{267}$, für die Quaterne $= \frac{5}{5162}$ und für die Quinte $\frac{2}{110983}$, $\frac{5}{490314}$; 193) die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles verhält sich zu der des zweiten wie 775 zu 504.

Drittes Kapitel.

Von der Zinseszinsrechnung.

Wie werden die für die Zinseszinsrechnung gültigen Formeln entwickelt?

In welchen Fällen werden diese Formeln hauptsächlich gebraucht?

Formeln.

I. Ist ein Kapital von a Thlr. zu p % in n Jahren zu Q Thlrn. angewachsen, wenn Zinseszinsen gerechnet werden, so erhält man:
$Q = a \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n = a \cdot e^n$, indem man nämlich $\frac{100+p}{100}$ der Kürze wegen durch e ausdrückt;

$$a = Q : \left[\frac{100+p}{100}\right]^n,$$

$$n = \frac{\log Q - \log a}{\log e},$$

$$p = -100 + 100 \cdot \sqrt[n]{\frac{Q}{a}}.$$

II. Die Gesammtsumme, zu welcher ein aus a Thlr. bestehendes und zu p % ausgeliehenes Kapital am Ende des nten Jahres angewachsen ist, wenn zu Ende eines jeden Jahres noch b Thlr. hinzugethan oder b Thlr. davon weggenommen und Zinseszinsen gerechnet werden, beträgt:

$$\left[ae^n \pm b\left(\frac{e^n - 1}{e - 1}\right)\right] \text{ Thlr.}$$

Aufgaben *).

1) Ein Kapital von 5000 Thlr. steht zu 4 % auf Zinseszinsen. Was wird daraus nach 40 Jahren?

2) Was wird aus 3200 Thlr. zu 3 % nach 80 Jahren, wenn Zinseszinsen gerechnet werden?

---

*) Im 8ten und 12ten Kapitel des 1sten Bandes sind mehre hieher gehörige Aufgaben befindlich.

3) Ein Forstrevier ist zu 32500 Klafter abgeschätzt worden, und man weiß aus der Erfahrung, daß 100 Klafter sich jährlich um 3 Klafter vermehren. Wie viel Klafter wird dieses Revier, wenn es geschont wird, nach 24 Jahren enthalten?

4) In einer gewissen Provinz zählt man gegenwärtig 200000 Menschen. Wenn nun die Bevölkerung jährlich um den 50sten Theil zunimmt, wie groß wird sie nach 100 Jahren sein?

5) In einer Stadt zählt man 20000 Seelen, und man weiß, daß sich die Volksmenge regelmäßig jährlich um $\frac{3}{100}$ vermehrt habe. Wie groß war daselbst die Volksmenge vor 10 Jahren?

6) Ein Kapital von 800 Thlr. ist in 6 Jahren auf 3600 Thlr. angewachsen; zu wie viel Procent ist dieses Kapital benutzt worden?

7) Wenn ein Kapital von 5680 Thlr. nach 10 Jahren auf 9000 Thlr. anwachsen soll, zu welchen Procenten muß es ausgeliehen werden?

8) In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital, wenn es entweder zu 4% oder zu 5% auf Zinseszinsen ausgeliehen wird?

9) Ein Kapital von 6000 Thlr. steht auf Zinseszinsen zu 5% und wird am Ende eines jeden Jahres, außerdem daß die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, auch noch um 500 Thlr. vermehrt. Wie viel wird dadurch das Kapital in 10 Jahren werden?

10) Eine Schuld von 15467 Thlr. ist zu 5% verzinset; es wird darauf am Ende eines jeden Jahres 600 Thlr. abgetragen. Wie viel beträgt der Rest der Schuld nach 10 Jahren?

11) Jemand giebt ein Kapital von 30000 Thlr. zu 4% auf Zinsen, nimmt am Ende eines jeden Jahres von den erhaltenen Zinsen 800 Thlr. zu seinem Unterhalte hinweg, und schlägt den Rest zum Kapital; wie groß wird das Kapital nach 15 Jahren sein?

12) Jemand hat sein ganzes Vermögen von 100000 Thlr. zu 5% auf Zinsen gegeben, ist aber nicht im Stande, mit den Zinsen dieses Kapitals seinen Aufwand zu bestreiten, weil er dazu jährlich 6000 Thlr. braucht. Er ist daher genöthigt, am Ende eines jeden Jahres so viel vom Kapital hinweg zu nehmen, daß dieses sammt den erhaltenen Zinsen 6000 Thlr. beträgt. Nach wie viel Jahren wird der Mann, wenn er so fortfährt, ein Bettler werden?

13) Jemand, der eine Jahrrente von 500 Thlr. auf 6 Jahre zu genießen hat, will solche verkaufen; wie viel kann man ihm für diese Rente an baarem Gelde geben, wenn die Zinsen zu $3\frac{1}{2}$% gerechnet werden?

14) Eine gegenwärtige Schuld von 1200 Thlr. soll in 7jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden. Wie hoch

muß man diese Terminzahlungen ansetzen, wenn die Zinsen zu 4% gerechnet werden?

15) Jemand erspart jährlich 150 Thlr.; er legt dieselben zu Anfang eines jeden Jahres auf Zinseszinsen zu 5% an; wie viel wird er sich bis zu Ende des 20ten Jahres erspart haben?

16) Ein Staat nimmt bei einem Banquier eine Summe von 3000000 Thlr. zu 5% auf Zinsen und verspricht ihm dagegen eine Landeseinnahme, deren Ertrag am Ende eines jeden Jahres 212400 Thlr. beträgt. Wenn nun der Banquier diese Einnahme ebenfalls zu 5% Zinsen anstatt der Bezahlung annimmt; wie lange darf er dieselbe beziehen, damit kein Theil dem andern noch verbindlich ist?

17) Ein 60jähriger Mann, dessen Vermögen 7500 Thlr. beträgt und zu 4% ausgeliehen ist, glaubt noch 9 Jahre leben zu können; wie groß ist die jährliche Rente, die er von seinem Vermögen beziehen kann, wenn er bei seinem Tode sein ganzes Vermögen verzehrt haben will?

18) Ein appanagirter Prinz hat 25 Jahre lang jährlich eine Appanage von 16000 Thlr. zu beziehen; gesetzt er wolle sie jetzt auf einmal an einen Banquier verkaufen, wie viel müßte ihm dieser bei 4% zusammengesetztem Rabatt bezahlen?

19) Ein Kapital von 10000 Thlr wird zu 5% verliehen, die Zinsen zum Kapital geschlagen und 4% jährlich verzehrt. Wie groß ist das Kapital in 20 Jahren?

20) Wie groß ist das Kapital, aus dem bei Zinseszinsen zu 3% das Vierfache wird?

21) Ein Kapital von 300 Thlr. ist durch Zinseszinsen zu 3% in 6 Jahren und durch einen jährlichen Zuschuß am Ende eines jeden Jahres auf 800 Thlr. angewachsen. Wie groß war der jährliche Zuschuß?

22) Wenn ein schuldiges Kapital von 900 Thlr., das zu 3% auf Zinseszinsen steht, durch einen jährlichen Abtrag in 8 Jahren auf ein Kapital von 400 Thlr. herabsinkt; wie groß war der jährliche Abtrag?

23) Ein Kapital steht auf Zinseszinsen zu 4%. Man trägt darauf am Ende eines jeden Jahres 50 Thlr. ab, wodurch es in 21 Jahren ganz getilgt ist. Wie groß war das Kapital?

24) Es steht ein Kapital von 1000 Thlr auf Zinseszinsen zu 6%. Es soll in 20 Jahren durch eine gleiche jährliche Zurückzahlung getilgt werden. Wie groß muß der jährliche Abtrag sein?

Resultate.

1) 124005, 103.... Thlr., oder 24005 Thlr. 2 Gr. 6 Pf. ohngefähr; **2)** 34050, 84... Thlr.; **3)** 66065, 808.... Klaf-

ter; **4)** 1448927 Menschen beinahe; **5)** 14882 Seelen; **6)** zu $28\frac{1}{2}\%$ beinah; **7)** zu 4, 71%; **8)** das 4procentige in 17, 67 und das 5procentige in 14, 20 Jahren; **9)** 16062 Thlr. 7 Gr. ohngefähr; **10)** 17647 Thlr. ohngefähr; **11)** 38009 Thlr. 10 Gr. beinah; **12)** nach 36 bis 37 Jahren; **13)** 2664 Thlr. 7 Gr. ohngefähr; **14)** zu 200 Thlr. beinah; **15)** 5207, 8 Thlr.; **16)** 25, 1 Jahr; **17)** 1008, 7 Thlr.; **18)** 249953 Thlr.; **19)** 12201, 9 Thlr.; **20)** 46 Jahr 10 Monat 24 Tage; **21)** 68 Thlr. 7 Gr. 2 Pf.; **22)** 83 Thlr. 5 Gr. 5 Pf.; **23)** 701 Thlr. 11 Gr.; **24)** 87 Thlr. 4 Gr. 3 Pf.

Viertes Kapitel.

Von einigen vermischten Aufgaben aus der Algebra und allgemeinen Größenlehre.

Man soll folgende Aufgaben nach x auflösen;

1) $\frac{2c^2}{d^2} + \frac{ac}{d} - (a - b) \,.\, (2c + ad)\frac{x}{d} = (a+b)\frac{cx}{d} - (a^2 - b^2)x^2$;

2) $32a^{2m}c^{n-1} + 4a^{m+3}c^{n-1}(ac^3 - 2) \,.\, x = a^7c^{n+2}x^2$;

3) $abx^2 - 2x(a+b)\sqrt{ab} = (a - b)^2$;

4) $\frac{5a + 10ab^2}{9b^2 - 3a^2b^2} \,.\, x^2 - \left[\frac{5\sqrt{a+b}}{3b^3} + \frac{(1+2b^2)\,cd\sqrt{c}}{3 - a^2}\right]$
$\,.\, x + \frac{cd}{ab}\sqrt{(a+b)\,c} = 0$;

5) $3\sqrt{112 - 8x} = 19 + \sqrt{3x+7}$.

Man soll folgende Aufgaben nach x und y auflösen:

6) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a \\ x^2 - y^2 = b \end{array}\right\}$;

7) $\left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{array}\right\}$;

8) $\left\{\begin{array}{l} x \,.\, y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{array}\right\}$;

9) $\left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b \end{array}\right\}$;

Man soll folgende Aufgaben nach x und y auflösen:

10) $\left\{\begin{array}{l} x+y+x^2+y^2=a \\ x-y+x^2-y^2=b \end{array}\right\}$;

11) $\left\{\begin{array}{l} x+y \quad\quad = x \,.\, y \\ x+y+x^2+y^2=a \end{array}\right\}$;

Man soll folgende Aufgabe nach x, y und z auflösen:

12) $\left\{\begin{array}{l} \frac{xyz}{x+y}=a \\ \frac{xyz}{y+z}=b,\ \frac{xyz}{x+z}=c \end{array}\right\}$

Man soll folgende Aufgaben nach x und y auflösen:

13) $\left\{\begin{array}{l} (x+y):x=5:3 \\ x.y \quad =6 \end{array}\right\}$;

14) $\left\{\begin{array}{l} (x-y):x=5:6 \\ xy \quad =96 \end{array}\right\}$;

15) $\left\{\begin{array}{l} (x+y):x \ =7:5 \\ xy+y^2=126 \end{array}\right\}$;

16) $\left\{\begin{array}{l} x+y=s \\ x^2-y^2=d^2 \end{array}\right\}$;

17) $\left\{\begin{array}{l} \frac{xy}{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}} = 48 \\ \frac{xy}{\sqrt{x}} = 24 \end{array}\right\}$;

18) $\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{y}}=x+2xy \\ x^2-2y^2=256-x\sqrt{y} \end{array}\right\}$;

19) $\left\{\begin{array}{l} (\sqrt{x}+\sqrt{y}):(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 5:1 \\ x-y \quad\quad = 5 \end{array}\right\}$;

20) $\left\{\begin{array}{l} (\sqrt{x}+\sqrt{y}):(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 11:1 \\ x\,.\,y \quad\quad = 900 \end{array}\right\}$;

21) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=93 \\ xyz \quad =29760 \\ xz \quad =960 \end{array}\right\}$;

Man soll folgende Aufgabe nach x, y und z auflösen:

22) $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=84 \\ x+y+z=14 \\ x\,.\,y=8 \end{array}\right\}$;

Man soll folgende Aufgabe nach x auflösen:

23) $\left(\frac{x+m}{x-m}\right)-x=a$;

Man soll folgende Aufgaben nach x auflösen:

24) $\sqrt{5x+11} \,.\, \sqrt{3x-6} = 54;$

25) $5\sqrt{x+7} + \dfrac{3x+1}{\sqrt{x+7}} = 3\sqrt{8x};$

26) $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \dfrac{21}{\sqrt{2x+1}};$

27) $\dfrac{123+41\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-x} = \dfrac{20\sqrt{x}+4x}{3-\sqrt{x}} - \dfrac{2x^2}{(5\sqrt{x}-x)(3-\sqrt{x})};$

28) $(x+6)^2 + 2x^{\frac{1}{2}}(x+6) = 138 + x^{\frac{1}{2}}.$

Man soll folgende Aufgaben nach x und y auflösen:

29) $\left\{ \begin{matrix} x-2\sqrt{xy}+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}=0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{matrix} \right\};$

30) $\left\{ \begin{matrix} \sqrt{\dfrac{3x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{3x}} = 2 \\ xy - (x+y) = 54 \end{matrix} \right\};$

31) $\left\{ \begin{matrix} x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{3}{2}} = 2y^2 \\ 8x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{2}} = 14 \end{matrix} \right\};$

32) $\left\{ \begin{matrix} x + x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{y^2+y+2}{x^{\frac{1}{2}}} + 4 \\ y + xy = y^2 + 4y \end{matrix} \right\};$

33) $\left\{ \begin{matrix} \sqrt{\dfrac{5x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{5x}} = 2 \\ xy + x + y = 84 \end{matrix} \right\};$

34) $\left\{ \begin{matrix} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2 \\ x^2 - 18 = x(4y-9) \end{matrix} \right\}.$

35) Man soll drei Zahlen ermitteln, so, daß das Produkt der 1ten und 2ten $= a$, das Produkt der 1ten und 3ten $= b$, und die Summe der Quadrate der 2ten und 3ten $= c$ sei. Welche Zahlen sind es?

36) Man soll 3 Zahlen aus folgenden Angaben bestimmen: Addirt man die 1te zum $m$fachen der übrigen, so ist ihre Summe $= a$; addirt man die 2te zum m' fachen der übrigen, so ist die Summe $= a'$; und addirt man die 3te zum m'' fachen der übrigen, so ist die Summe $= a''$. Welche Zahlen sind es?

37) Die Summe zweier Zahlen ist $= a$ und die Summe ihrer Quadrate $= b$; welche Zahlen sind es?

38) Man soll 2 Zahlen ermitteln, deren Summe $= a$ und deren Summe der Biquadrate $= b$ beträgt. Welche Zahlen sind es?

39) Die Summe zweier Zahlen ist = a und die Summe ihrer 5ten Potenzen = b; welche Zahlen sind es?

40) Die Summe zweier Zahlen ist = a, und das Produkt derselben mit der Summe ihrer Quadrate multiplicirt = b. Welche Zahlen sind es?

41) Die Differenz der mittlern Glieder einer geometrischen Proporportion ist = a, die Differenz der beiden äußern = b, und die Summe der Quadrate aller 4 Glieder = c. Welche Proportion ist es?

42) In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußern oder mittlern Glieder = a, die Summe aller 4 Glieder = b und die Summe ihrer Quadrate = c; welche Proportion ist dies?

43) In einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist die Summe aller Glieder = a, und die Summe ihrer Quadrate = b; welche Progression ist es?

44) In einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist die Summe aller Glieder = a, die Differenz zwischen der Quadratsumme der äußern und der Quadratsumme der mittlern Glieder = b; welche Progression ist es?

45) In einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist die Summe der beiden äußern Glieder = a, und die Summe der beiden mittlern = b; welches ist die Progression?

46) In einer geometrischen Proportion ist die Summe aller Glieder = a, die Summe ihrer Quadrate = b und die Summe ihrer Kuben = c gegeben; welche Proportion ist es?

47) In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußern oder mittlern Glieder = a, die Summe aller Glieder = b und die Summe ihrer Kuben = c gegeben; welche Proportion ist es?

48) Ein Kapitalist giebt 10000 Thlr. auf Zinsen und schlägt die Zinsen jährlich zum Kapital. Am Ende des dritten Jahres ist sein Kapital auf 11576¼ Thlr. angewachsen; wie viel Procent trug es jährlich?

49) Drei Zahlen sind so beschaffen, daß das Quadrat der ersten mit der zweiten multiplicirt = a, das Quadrat der zweiten mit der dritten = b, und das Quadrat der dritten mit der ersten = c sei. Welche Zahlen sind es?

50) Die Summe zweier Zahlen ist = a, die Summe ihrer 6ten Potenzen = b; welche Zahlen sind dies?

51) Ein Stoff A hat das specifische Gewicht p *), und ein anderer Stoff B das specifische Gewicht p'. Wie viel muß man von

*) d. h. wiegt p mal so viel als ein gleiches Volumen Wasser.

dem zweiten Stoffe mit einer Quantität des ersten Stoffes, dessen Gewicht = g ist, verbinden, wenn der so verbundene Körper das zwischen p und p' fallende specifische Gewicht p'' besitzen soll?

52) Zwei Maulthiertreiber, A und B, machten unter einem Baume Halt, um ihren Vorrath an Lebensmitteln zu verzehren. Sie brachten 5 Brode und 1 Flasche Wein zusammen; A hatte nämlich 4 Brode und B 1 Brod nebst der Flasche Wein mitgebracht. Als jetzt ein Reisender vorüber kam, so luden sie ihn zur Theilnahme an ihrem Mahle ein. Beim Weggehen gab er ihnen $22\frac{1}{2}$ Kr. zur verhältnißmäßigen Vertheilung. Die Maulthiertreiber kauften sich nun in der nächsten Stadt für eben so viele Groschen, als ein Brod in Heller kostet und noch 6 Kr. dazu 4 Brode und 2 Flaschen Wein von derselben Qualität; und als sie ihr erhaltenes Geschenk nach dem Willen des Gebers vertheilten, so erhielt B $4\frac{1}{2}$ Kr. mehr als A. Was kostete 1 Brod, und wie theuer war eine Flasche Wein? *)

53) 5 Personen haben eine gemeinschaftliche Schuld von 40 Fl. zu bezahlen. Wenn der 5te frei gehalten wird, so würden die übrigen, wenn sie ihr Geld zusammenlegten, nach Bezahlung der Schuld im Ganzen 3 Fl. übrig behalten. Wäre der Vierte frei, so blieb 1 Fl. 18 Kr. übrig; wäre der Dritte frei, so blieben 2 Fl. 24 Kr. übrig; wäre der Zweite frei, so blieben 3 Fl. 12 Kr. übrig; wäre der Erste frei, so blieb 2 Fl. 18 Kr. übrig. Wie viel hatte Jeder bei sich?

54) Ein Seeräuber erblickte einen Kauffahrer 7 Meilen von sich entfernt. Er verfolgte ihn 20 Meilen weit, als er bemerkte, daß dieser seinen Weg änderte, und in senkrechter Richtung zu seinem bisherigen Ziele weiter steuerte. Der Seeräuber änderte sogleich seinen Lauf, um jenen einzuholen. Er wußte, daß er 10 Knoten, der Kauffahrer aber nur 8 Knoten in 1 Stunde zurücklegte. Wie viele Meilen mußte im Ganzen der Seeräuber zurücklegen, bis er das andere Schiff einholte?

55) A und B nehmen an einem Spiele Theil. Am Ende des Spieles besaß A 11 Louisd'or und hatte so viele Procente gewonnen, als B beim Spiele eingesetzt hatte. Der Gewinn des B betrug 36 Louisd'or; und A hatte demnach 4 mal so viele Procente als B gewonnen. Wie viel hatte Jeder vor dem Spiele?

56) Die Länge eines Grundstückes von rechteckiger Form verhält sich zur Breite wie 9 : 8. Der 4te Theil desselben war zu einem Garten, und das Uebrige, welches 864 Quadratklafter enthielt,

*) 1 Kreuzer = 4 Heller, und 1 Groschen = 3 Kreuzer.

zu einem Weinberg angelegt. Wie lang und breit ist dieses Grundstück.

57) Es kaufte Jemand ein Stück Tuch. Nach einiger Zeit verkaufte er es wieder für 480 Thlr., und gewann dabei so viele Procente, als der 20te Theil des Einkaufspreises beträgt. Wie viel kostete das Tuch im Einkaufe?

58) Ein Weinhändler kaufte 48 Ohm Niersteiner und eine gewisse Quantität Laubenheimer. Für den Ohm von dem ersten gab er noch einmal so viel Gulden, als er Ohm Laubenheimer kaufte; für den Ohm von dem letztern gab er 6 Fl. weniger als für den Ohm von dem ersten. Er mischte beide unter einander und verkaufte den Ohm der Mischung für 60 Fl. Er verlor dadurch im Ganzen 792 Fl. Wie theuer war der Ohm Niersteiner und wie viele Ohm Laubenheimer hatte er gekauft?

59) Es vermachte Jemand in ein Armenhaus, worin 26 Arme sich befanden, 168 Thlr., wovon die eine Hälfte unter die Männer, die andere unter die Weiber zu gleichen Theilen vertheilt werden soll. Es findet sich, daß bei dieser Vertheilung ein Mann 1 Thlr. mehr als ein Weib bekommt. Wie viele Männer und Weiber waren in dem Armenhause, und wie viel erhielt Jedes?

60) **A** und **B** verleihen 2 Summen, die zusammen 200 Thlr. betragen, zu verschiedenen Procenten, und zwar so, daß **B** 1% mehr als **A** erhält. Nach 5 Jahren betragen die einfachen Interessen von **B** das Doppelte von denjenigen des **A**, weniger 4 Thlr.; und nach 10 Jahren verhält sich das Kapital sammt Zinsen des **A** zu dem des **B** wie 5 zu 8. Wie viel verlieh jeder und zu welchen Procenten?

61) Auf einer Straße von 12 Meilen kommen jetzt im Durchschnitte jährlich 6400 Thlr. ein, welche sich um 75% vermehren würden, wenn man diese Straße in eine Chaussee umwandelte. Da jedoch der Chausseebau 160000 Thlr. kosten würde, so fragt es sich, wie viele Jahre nothwendig sein werden, um bei 4% Zinsen das ganze Kapital wieder zu erhalten?

62) Ein Wald, der erst nach Verlauf von 20 Jahren einen reinen Ertrag von 1440 Thlr. jährlich abwirft, ist zu verkaufen. Wie viel könnte man jetzt dafür geben, wenn man das darauf zu bezahlende Kapital zu $4\frac{1}{2}$% jährlichen Interessen in Anschlag bringt?

63) Es kauft jemand ein Gut, bezahlt sogleich abschläglich 10000 Thlr., und will den Rest des Kaufschillings in 6 auf einander folgenden Jahren jedesmal mit 1000 Thlr. bezahlen. Wie theuer hat er das Gut gekauft, wenn man die jährlichen Zinsen zu 3% anschlägt?

64) Wenn man bei einer Lebensversicherungsanstalt 6800 Thlr. niederlegt, um sich eine Leibrente von jährlich 360 Thlrn. zu ver-

sichern; wie viele Jahre kann die Anstalt diese Rente ohne Nachtheil geben, wenn die Einlage zu $3\frac{1}{2}$% berechnet wird?

65) Der gegenwärtige Bestand eines Waldes ist 40000 Klafter. Von 1000 Klaftern beträgt der jährliche Zuwachs 12 Klafter. Dieser Wald soll noch 4 Jahre geschont werden, und dann in 60 Jahren, d. h. mit 61 Schlägen, völlig abgetrieben sein. Wie viele Klafter sind jährlich zu schlagen?

66) Ein Fleischer kauft eine Anzahl Ochsen. Die Hälfte giebt er auf die Weide, $\frac{1}{8}$ in die Fütterung, $\frac{1}{12}$ behält er zum Schlachten und den Rest verkauft er, jeden Ochsen für so viel Thaler, als er anfangs Ochsen gekauft hatte. Wie viele Ochsen hat er gekauft?

67) Ich habe in einem Monate täglich etwas nach einer arithmetischen Progression zurückgelegt. Am ersten desselben 1 Thlr., am letzten 85 Thlr., und im ganzen Monate 1247 Thlr. Wel- Monat war dies?

68) Ein Rathhaus hat im Untergeschoß etliche Stuben. Wenn ich die Zahl derselben weniger 5 mit ihr selbst weniger 6 multiplicire, so kommen 3 mehr, als Stuben sind. Wie viele Stuben sind es?

69) Es giebt eine arithmetische und eine geometrische Progression, jede von 3 Gliedern, dergestalt, daß die Summe aller 6 Glieder 96 beträgt, daß die erste Zahl der arithmetischen in der ersten Zahl der geometrischen 2 mal, die zweite Zahl der arithmetischen in der zweiten Zahl der geometrischen 3 mal, und die dritte Zahl der arithmetischen in der dritten Zahl der geometrischen 6 mal enthalten sei. Welches sind die Zahlen?

70) Ein Prinz fragte seinen Hofmeister um sein Alter, und erhielt folgende Antwort: Wenn Sie Ihr Alter und Ihres Vaters Alter mit einander multipliciren, so bekommen Sie 1176; wenn Sie aber beider Alter addiren, so beträgt die Summe 77 Jahre. Wie alt war der Prinz und der Vater?

71) Ein Lehrer hat 3 Klassen von Schülern. Einer aus der mittlern Klasse giebt vierteljährlich 3 Thlr. mehr als einer aus der untersten; einer aus der höchsten Klasse aber 5 Thlr. mehr als einer aus der mittlern. In der untersten Klasse sind 11 mehr als in der mittlern, und in der mittlern 11 mehr als in der höchsten. Ueberhaupt sind in der höchsten Klasse $1\frac{1}{4}$ mal so viele Schüler, als einer in der untersten Klasse vierteljährlich Thaler giebt. Der Lehrer erhält im Vierteljahre von Allen 73 mal so viel Thaler, als einer von den untersten giebt. Wie viele Schüler waren in der Schule, und wie viele befanden sich in jeder Klasse?

72) Ein Mathematiker bestimmt die Höhe eines Thurmes dergestalt, daß, wenn man 106 Fuß davon abzieht oder 1009 Fuß dazu

addirt, jedesmal eine Kubikzahl kommt, und daß die Wurzeln der letztern um 5 verschieden sind. Wie hoch war der Thurm?

73) Ein Gärtner hatte etliche Gärten, worin in jedem so viele tragbare Bäume standen, als Gärten vorhanden waren. Er verkaufte die Früchte von jedem Baume für so viele Thaler, als er Gärten hatte, und bekam in Allem 4096 Thlr. Wie viele Gärten waren vorhanden?

74) Ein Stadtgraben soll 4 mal so breit als tief, und 8 mal so lang als breit sein. Für das Herausschaffen von 8 Kubik-Ellen giebt man $1\frac{1}{2}$ Thlr., und für Alles $273\frac{3}{8}$ Thlr. Wie tief, breit und lang wird dieser Graben?

75) Einige Kaufleute bilden eine Handels-Gesellschaft, wozu ein Jeder 100 mal so viel einlegt, als ihrer sind. Sie gewinnen jedesmal mit 100 Fl. 2 mal so viel, als ihrer sind, und erhaleinen Gesammtgewinn von 2662 Fl. Wie viele Kaufleute sind es?

76) Eine Bäuerin vertauscht Enten gegen Hühner und giebt allemal 2 Enten für 3 Hühner. Die Hühner legen Eier, jedes $\frac{1}{3}$ so viel, als ihrer sind; und mit diesen Eiern geht die Bäuerin zu Markte, giebt jedesmal 9 Eier für so viele Pfennige, als ein Huhn Eier gelegt hat, und löst 72 Pfennige. Wie viele Enten hat die Bäuerin vertauscht?

77) Einige Kaufleute haben ein Kapital von 8240 Thlr. zusammengebracht, zu welchem ein Jeder noch 40 mal so viel Thaler legt als Personen vorhanden sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viele Procente, als Personen sind; sie theilen hierauf den Gewinn, und finden, daß, nachdem ein Jeder 10 mal so viele Thaler gewonnen, als ihrer sind, noch 224 Thlr. übrig bleiben. Wie viele Kaufleute waren vorhanden?

78) Eine Mauer ist $3\frac{1}{2}$ mal so hoch als dick, und 5 mal so lang als hoch. Jeder Kubikfuß kostet so viele Thaler, als die Dicke Fuße hat, und die ganze Mauer 980 Thlr. Wie dick, lang und hoch ist die Mauer?

79) Jemand kauft Ochsen und Kühe für 464 Thlr., und bezahlt für 1 Ochsen 24 Thlr. und für 1 Kuh 16 Thlr. Wie viele Ochsen und Kühe wird er erhalten?

80) 30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, verzehren 50 Thlr., wozu der Mann 3 Thlr., die Frau 2 Thlr. und das Kind 1 Thlr. bezahlt. Wie viele Personen von jeder Art waren vorhanden?

81) Ein Hirte bestimmte die Größe seiner Schaafheerde auf folgende Weise: Wenn immer 5 in einer Reihe gehen, so bleiben zuletzt 2 übrig; gehen 6 in einer Reihe, so bleiben 3 übrig; gehen 7, so bleiben 4; gehen 8, so bleiben 5; gehen aber 9, so bleibt keins übrig. Wie viele Schafe konnte der Hirte haben?

82) Fünf Studenten verzehren eine Anzahl Thaler; keiner ist aber im Stande sie allein zu bezahlen. Der erste sagt deßhalb zu den vier andern: gebt mir $\frac{1}{5}$ von eurem Gelde zu dem meinigen v, so will ich allein bezahlen. Der zweite sagt: hätte ich $\frac{1}{7}$ von eurem Gelde zu dem meinigen w, so wollte ich die Bezahlung allein übernehmen. Der dritte sagt, überlaßt mir $\frac{1}{9}$ von eurem Gelde, so bezahle ich, nach Hinzufügung des meinigen x, allein. Der vierte sagt: wenn ich $\frac{1}{11}$ von eurem Gelde zu dem meinigen y lege, so leiste ich die Zahlung allein. Der fünfte bemerkte endlich: ich verlange nur $\frac{1}{13}$ von eurem Gelde zu dem meinigen z, um die Bezahlung allein übernehmen zu können. Wie viel Geld hatte ein Jeder, und wie viel haben sie zusammen verzehrt, oder wie groß ist S?

83) Ein Uhrmacher U verkauft an einen andern V, x goldene Uhren gegen z silberne und y tombackene. U schlägt das Stück goldener Uhren zu 50 Thlr., V aber das Stück silberner zu 21 Thlr. und das Stück tombackener zu 16 Thlr. an. Wie viele silberne und tombackene Uhren erhielt U gegen eine Anzahl seiner goldenen?

84) Es giebt eine Zahl, welche, wenn man 482 zu ihr addirt, oder 120 von ihr subtrahirt, jene Summe und diese Differenz einer Kubikzahl giebt, deren Wurzeln um 2 verschieden sind. Welche Zahl ist es?

85) Ein Sohn wollte das Alter seines Vaters wissen, und bekam folgende Antwort: Auf der Spitze meines Hauses steht eine Kugel, deren körperlicher Inhalt $11498\frac{2}{3}$ Kubikzoll beträgt. Der Durchmesser dieser Kugel verhält sich aber zu meinem jetzigen Alter wie 7 zu 13. Wie alt war nun der Vater?

86) Ein Landwirth geht mit seinem mathematischen Freunde aus der Stadt auf dem Felde spazieren, wo sie eine Pflanze antreffen, deren Name der Städter zu wissen wünscht. Der Landwirth antwortet ihm: ich gebe Ihnen 4 Zahlen, wenn sie dieselben deutsch aussprechen, und von jeder Zahl den ersten Buchstaben nehmen, so haben Sie den Namen dieser Pflanze. Die 4 Zahlen bestimme ich Ihnen aber auf folgende Weise: multiplicire ich das Quadrat der ersten Zahl mit sich selbst und addire dazu 599, so kommen 3000. Addire ich zur zweiten Zahl $\frac{1}{6}$, so bekomme ich eine Zahl von der Eigenschaft, daß, wenn ich 7 zu ihr addire, oder sie mit 7 multiplicire, Summe und Produkt gleich sind. Die dritte Zahl findet sich durch Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl, die 10000 mal so groß ist, als sie selbst, wenn ich diese Wurzel durch 100 dividire und den Quotienten mit 3 multiplicire. Die vierte Zahl ist das erste Glied einer geometrischen Progression von 3 Zahlen, deren

Summe 35 und deren Produkt 1000 ist. Welches sind die Zahlen, und wie heißt also die Pflanze?

87) Man soll die Gleichung

$$\frac{44+\sqrt{2.x^3-201}}{3}-16=1$$

nach x auflösen.

88) Man soll aus der Gleichung $a.\left(\frac{b}{c}+d\right)-\sqrt[n]{e.k^m+f}=g$, jeden der Ausdrücke a, b, c, d, e, k, f ermitteln.

89) Man soll die Gleichung $a=\sqrt[n]{\frac{a}{b(x^m+c)}}$ nach x, c u. b auflösen.

90) Man soll die Gleichung

$$\frac{\left([1+\sqrt[3]{(3x^3-16)^2}].2+1\right)^2+4}{5}-20=5$$

nach x auflösen.

91) Man soll die Gleichung $\frac{1+\sqrt[3]{5+\sqrt{27-2x^2}}}{3}-1=0$ nach x auflösen.

92) Jemand sagt: b Thlr. jetzt baar sind mir eben so viel werth als a Thlr., welche ich erst in n Jahren erhalte. Zu wie viel % wird das Geld benutzt?

Man soll folgende Gleichungen nach x auflösen:

93) $\frac{a(b^2-x^2)}{bx}=ab-\frac{ax}{b}$;

94) $\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{5x}{a}$;

95) $\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}=\sqrt{4ax-c}$;

96) $\sqrt[3]{2a+x}=\sqrt[6]{x^2+10ax+a^2}$;

97) $2x-a=\sqrt{2(a-x)^2}$.

98) Wenn man von einer Zahl Z die Zahl a und einen gewissen Theil des Restes, vom Uebriggebliebenen 2a und denselben Theil des Restes, von dem nun noch Vorhandenen 3a und wieder denselben Theil des Restes, dann 4a u. s. w. subtrahirt, so sind die hiedurch entstandenen Zahlen alle einander gleich. Wie viele entstehen, und der wie vielste Theil des jedesmaligen Restes ist allemal weggenommen worden?

99) A und B reisen von den Orten α und β nach entgegengesetzten Richtungen; A n Tage früher als B; A macht täglich a und

B täglich b Meilen. Nachdem A m Tage und B m — n Tage unterwegs ist, bekommen sie beide *) die Nachricht umzukehren, und treffen sich, ehe jeder seinen Ausgangsort wieder erreicht, in der Mitte zwischen α und β. Wie weit ist α von β? Wie weit war A über β, und wie weit B über α hinaus, als die Nachricht, umzukehren, eintraf?

100) Vier Personen, A, B, C, D theilen sich nach einem gewissen Verhältnisse in die Summe S. Wenn nun die Verhältnißzahlen für A, B, C genau α, β, γ betragen, so soll die Verhältnißzahl für D aus dem auf D fallenden Antheile R bestimmt werden.

101) A und B verkaufen Eier, und zwar A a Stück mehr als B. Hätte A zu dem Preise des B seine Eier verkauft, so hätte er n gelöst, und B würde m eingenommen haben, wenn er zu dem Preise des A verkauft hätte. Wenn aber nun A zweimal so viel als B eingenommen hat; wie viel Eier hatte ein Jeder?

102) Man soll die Gleichung $\frac{6}{x} + 1 = \sqrt{\frac{18}{x} + 7}$ nach x auflösen.

103) Man soll die Gleichung $ab(x^2 + 1) = (a^2 + b^2)x$ nach x auflösen.

104) Man soll die Gleichung $\sqrt{42 - 3\sqrt[3]{x}} = 3 + \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{x} + 1}$ nach x auflösen.

105) A und B legen eine Summe von a Thlr. in einen Handel; A läßt sein Geld n und B das seine m Monate stehen. Wenn aber nun A zuletzt an Einlage und Gewinn α, und B an Einlage und Gewinn β Thlr. erhält; wie viel hat Jeder eingelegt?

106) Ein Lehrer gab seinem Schüler eine Divisionsaufgabe, bei welcher der Dividend um 259 größer als der Divisor war. Nach verrichteter Division sagte der Schüler: mein Quotient ist 2 mal so groß als der mir gegebene Divisor, und 7 ist mir als Rest geblieben. Der Lehrer erwiederte, nachdem er die Rechnung durchgesehen: Du hast ja mit einem Divisor dividirt, der um 1 kleiner als der Dir gegebene war. Welche Zahlen hatte der Schüler zu dividiren?

107) Welche Werthe hat x in der Gleichung $x^3 - a^2x + 2a^3 = 2ax^2$.

108) Man soll folgende Gleichungen nach x und y auflösen;

$$\left\{ \begin{array}{l} abx = ay - 2b \\ b^2y + \frac{a^3 - b^3}{b} = \frac{2b^3}{a} + a^3x \end{array} \right\};$$

*) also gleichzeitig.

109) Man soll folgende Gleichungen nach x und y auflösen:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{4a-b}{a^2-b^2}\,ab=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}y\\(a^2-b^2)x+(a+2b).by=ab(a+2b)+\frac{ab^2}{a+b}\end{array}\right\};$$

110) $\left\{\begin{array}{l}\frac{ax}{y}=\frac{by}{x}\\x^2+y^2=c^2\end{array}\right\}$.

111) Zwei Zahlen zu bestimmen, deren Differenz ihrer Quadrate a mal, und deren Differenz ihrer dritten Potenzen b mal so groß als die Differenz der Zahlen ist. Welche Zahlen sind dies?

112) n Personen A, B, C, D, ... V, Z spielen so mit einander, daß der Verlierende allen übrigen so viel geben muß, als sie schon haben. Wenn aber nun zuerst A, dann B, dann C u. s. w., und endlich auch Z, verliert und ein Jeder zuletzt a Thlr. besitzt, wie viel hatte jede Person anfänglich?

113) Welche Brüche geben, addirt, die Summe $\frac{129}{77}$.

114) Wenn man einen Bruch von einem andern subtrahirt, so erhält man $\frac{129}{77}$; welche Brüche sind es?

115) Welche rationale Werthe für x und y entsprechen der Gleichung $3x^2-7x=5y^2+3y$?

116) Eine dreiziffrige Zahl verhält sich zu einer mit denselben Ziffern, aber in umgekehrter Ordnung, geschriebenen Zahl wie 4:7. Die Summe der ersten beiden Ziffern der gesuchten Zahl ist doppelt so groß als die letzte. Die Summe der Quadrate der 3 Ziffern beträgt 56. Welches ist die Zahl?

117) A und B spielen mit einander. A setzt zuerst den dritten Theil des Geldes, das er mehr bei sich hat als B, und verliert. Jetzt hat B eine Summe, welche eine vollkommene Quadratzahl darstellt. Wenn er aber nun die hieraus sich ergebende Quadratwurzel einsetzt und gewinnt, und jetzt beide gleich viel Geld besitzen, so fragt es sich, wie viel ein Jeder vor dem Spiele besaß?

118) Welche Werthe für x entsprechen der Gleichung:

$$\sqrt{2x+3}=\sqrt[3]{15x-2}?$$

119) Zwischen zwei Zahlen, deren Unterschied 24 beträgt, ist die mittlere geometrische Proportionalzahl gleich dem Quadrate der kleinern von beiden. Welches ist diese kleinere?

120) Welche Werthe für x, y, z entsprechen den 3 Gleichungen:

$$x+y+z=a,\ x^2+y^2+z^2=b^2,\ \text{und}\ \frac{xy}{z}=c?$$

121) Eine dreiziffrige Zahl, deren mittelste Ziffer = 1, und deren letzte *) zweimal so viel wie die erste **) beträgt, ist durch 11 theilbar. Welche Zahl kann es sein?

122) Die Summe aller 5 Glieder einer arithmetischen Progression ist = **s** und die Summe der Quadrate aller = b^2; welche Progression ist dies?

123) In einer arithmetischen Progression von 5 Gliedern ist die Summe aller Glieder = **s**, und die Summe ihrer Kuben = b^3. Wie groß ist das erste Glied **a** und die Differenz **d** dieser Progression?

124) Zwei Personen reisen einander entgegen; die erste macht den ersten Tag 4 Meilen, jeden folgenden aber $\frac{1}{4}$ Meile mehr als an dem vorhergehenden. Die zweite macht den ersten Tag 3 Meilen, jeden folgenden aber $\frac{1}{2}$ Meile mehr als an dem vorhergehenden. Als sie am Ende eines Tages zusammentreffen, hat die erste im Ganzen $2\frac{1}{2}$ Meilen mehr als die zweite zurückgelegt. Wie viele Tage war jede unterwegs; und den wie vielsten Tag machen beide gleich große Wege?

125) Zwei Personen reisen einander entgegen; jede (wie in Nr. 124) nach einer arithmetischen Progression. Die erste macht den ersten Tag eine Meile mehr als die zweite. Als sie sich am Ende des 6ten Tages treffen, haben sie zusammen $62\frac{3}{4}$ Meilen zurückgelegt; den letzten Tag hat die erste $\frac{7}{12}$ Meilen mehr als die zweite, und zusammen haben sie an diesem letzten Tage $11\frac{1}{12}$ Meilen gemacht. Wie ist jeder gereist?

126) Ein Brunnen ist auf **n** Fuß Tiefe auszugraben für **S** Thlr. verakkordirt. Die erste **e** Fuß tiefe Schicht kostet **a** Thlr. und jede folgende eben so tiefe wird immer um gleich viel theurer als die zunächst vorhergehende gerechnet. Nachdem das Ausgraben bis auf **m** Fuß erfolgt ist, findet sich Wasser und die Arbeit ist vollendet. Wie viel muß, dem Vertrage nach, gezahlt werden?

127) Eine Größe soll in **x** gleiche Theile getheilt, und einer dieser Theile als erstes Glied einer Progression genommen werden. Der Rest soll wieder in **x** gleiche Theile getheilt, und einer derselben soll zweites Glied werden. Der nun noch bleibende Rest soll abermals in **x** gleiche Theile getheilt, und einer derselben soll drittes Glied werden u. s. w. Man soll aber nun **x** so bestimmen, daß die Summe der entstehenden **n** ersten Glieder = **c** wird.

---

*) oder der Einer.

**) oder der Hunderte.

Resultate.

1) $x=\frac{2c+ad}{d(a+b)}$ und $x=\frac{c}{d(a-b)}$; 2) $x=4a^{m-3}$ und $x=-\frac{8a^{m-4}}{c^3}$; 3) $x=\frac{a+b\pm\sqrt{2a^2+2b^2}}{\sqrt{ab}}$;

4) $x=\frac{(3-a^2)\sqrt{a+b}}{ab(1+2b^2)}$ und $x=\frac{3b^2cd\sqrt{c}}{5a}$; 5) $x=6$;

6) $x=\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ und $y=\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$; 7) $x=\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}$ und $y=\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}$ oder $x=\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}$, und $y=\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}$; 8) $x=\pm\sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2}}$, und $y=\pm\sqrt{\frac{b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2}}$, oder $x=\pm\sqrt{\frac{b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2}}$, und $y=\pm\sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2}}$; 9) $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$ und $y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$, oder $x=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$ und $y=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$; 10) $x=\frac{-1\pm\sqrt{2a+2b+1}}{2}$ und $y=\frac{-1\pm\sqrt{2a-2b+1}}{2}$, oder $x=\frac{-1\pm\sqrt{2a+2b+1}}{2}$ und $y=\frac{-1\mp\sqrt{2a-2b+1}}{2}$;

11) $x=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}+\sqrt{[4a-6\mp6\sqrt{4a+1}]}}{4}$ und $y=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}-\sqrt{[4a-6\mp6\sqrt{4a+1}]}}{4}$;

12) $x=\pm\sqrt{\frac{2abc(ab-ac+bc)}{(ab+ac-bc)(bc+ac-ab)}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{2abc(bc+ac-ab)}{(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)}}$ und $z=\pm\sqrt{\frac{2abc(ab+ac-bc)}{(ab-ac+bc)(bc+ac-ab)}}$; 13) $x=\pm3$ und

$y=\pm 2$; 14) $x=24$ und $y=4$; 15) $x=15$ und $y=6$; 16) $x=\frac{s^2+d^2}{2s}$ und $y=\frac{s^2-d^2}{2s}$; 17) $x=36$ und $y=4$; 18) $x=\pm 16$ und $y=4$; 19) $x=9$ und $y=4$; 20) $x=\pm 36$ und $y=\mp 25$; 21) $x=32$ und 30, $y=31$, $z=30$ und 32; 22) $x=4$ und 2 und $4\pm 2\sqrt{2}$, $y=2$ und 4 und $4\mp 2\sqrt{2}$, $z=8$ und 6; 23) $x=\frac{m-a+1\pm\sqrt{(a+m)^2-2a+6m+1}}{2}$; 24) $x=14$ und $x=-14\frac{1}{5}$; 25) $x=18$ und $x=-9$; 26) $x=4$ und $x=-25$; 27) $x=\frac{41}{2}$ und $x=3$; 28) $x=4$, $x=9$ und $x=\frac{-33\mp\sqrt{-67}}{2}$; 29) $x=9$ und $x=\frac{25}{4}$, $y=4$ und $y=\frac{25}{4}$; 30) $x=6$ und $x=-\frac{9}{2}$, $y=12$ und $y=-9$; 31) $x=14^3$ und $x=8$, $y=98^2$ und $y=4$; 32) $x=4$ und $x=1$, $y=1$ und $y=-2$; 33) $x=4$ und $x=-\frac{21}{4}$, $y=16$ und $y=-21$; 34) $x=6$ und $x=3$, $y=3$ u. $y=\frac{3}{2}$; 35) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c}}$, $a\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}$ u. $b\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}$;

36) Die drei Zahlen sind $\frac{1}{m-1}\left(\frac{mB}{A-1}-a\right)$, $\frac{1}{m'-1}\left(\frac{m'B}{A-1}-a'\right)$ und $\frac{1}{m''-1}\cdot\left(\frac{m''B}{A-1}-a''\right)$, wenn man $\frac{m}{m-1}+\frac{m'}{m'-1}+\frac{m''}{m''-1}$ durch A, $\frac{a}{m-1}+\frac{a'}{m'-1}+\frac{a''}{m''-1}$ durch B bezeichnet;

37) $\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}$ und $\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}$; 38) $\frac{a+d}{2}$ und $\frac{a-d}{2}$, wenn man die Differenz dieser Zahlen, nämlich $\sqrt{-3a^2\pm\sqrt{8a^4+8b}}$ durch d bezeichnet, 39) die beiden Zahlen sind $\frac{1}{2}\,[a+\sqrt{a^2-4p}]$ und $\frac{1}{2}\,[a-\sqrt{a^2-4p}]$, wenn man das Produkt dieser Zahlen, nämlich $\frac{1}{2}\left[a^2\pm\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right]$ durch p ausdrückt; 40) die Zahlen sind $\frac{1}{2}\,[a+\sqrt{a^2-4p}]$ und $\frac{1}{2}\,[a-\sqrt{a^2-4p}]$, wenn man ihr Produkt, nämlich $\frac{1}{4}\,[a^2\pm\sqrt{a^4-8b}]$ durch p bezeichnet;

41) $\frac{1}{2}\,[-b+\sqrt{c-a^2}]:\frac{1}{2}[-a+\sqrt{c-b^2}]=\frac{1}{2}[+a+\sqrt{c-b^2}]:\frac{1}{2}[+b+\sqrt{c-a^2}]$; 42) bezeichnet man $\pm\sqrt{8a+2c-b^2}$ durch A, so erhält man die Proportion:

$$\tfrac{1}{4}[b+A-\sqrt{2c-8a+2bA}]:\tfrac{1}{4}\,[b-A-\sqrt{2c-8a-2bA}]$$
$$=\tfrac{1}{4}[b-A+\sqrt{2c-8a-2bA}]:\tfrac{1}{4}[b+A+\sqrt{2c-8a+2bA}];$$

43) bezeichnet s die halbe Summe und d die halbe Differenz der

beiden mittlern Glieder, so ist $s = \frac{-b\sqrt{b^2 + 2a^2(a^2 - b)}}{4a}$, $d = s\sqrt{\frac{a - 4s}{a + 4s}}$, und es ergeben sich hieraus die beiden mittlern Glieder $= s - d$ und $s + d$ und die beiden äußern $= \frac{(s-d)^2}{s+d}$ und $\frac{(s+d)^2}{s-d}$; 44) es ist die halbe Summe der mittlern Glieder, nämlich $s = \frac{a^2 - b}{4a}$, die halbe Differenz $d = \pm s\sqrt{\frac{b}{8as + b}}$ ꝛc.; 45) bezeichnet man den Faktor der Progression, nämlich $\frac{a + b \pm \sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2b}$ durch e, so ist das erste Glied $= \frac{a}{e^3 + 1}$ $= \frac{b}{e^2 + e}$; 46) das Produkt der mittlern oder der äußern Glieder ist $p = \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6a}$, die Differenz zwischen der Summe der beiden äußern und der Summe der beiden mittlern ist $d = \pm\sqrt{\frac{a^3 - 6ab + 8c}{3a}}$, also die Summe der beiden äußern $= \frac{a+d}{2}$, die Summe der beiden mittlern $= \frac{a-d}{2}$, und deßhalb die Proportion:

$$\tfrac{1}{4}[a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 16p}] : \tfrac{1}{4}[a - d - \sqrt{(a-d)^2 - 16p}]$$
$$= \tfrac{1}{4}[a - d + \sqrt{(a-d)^2 - 16p}] : \tfrac{1}{4}[a + d + \sqrt{(a+d)^2 - 16p}];$$

47) bezeichnet man $\pm\sqrt{\frac{4c + 12ab - b^3}{3b}}$ durch A, so ist $\frac{b+A}{2}$ die Summe der äußern, also $\frac{b-A}{2}$ die Summe der mittlern Glieder, und man erhält die Proportion:

$$\tfrac{1}{4}[b + A - \sqrt{(b+A)^2 - 16a}] : \tfrac{1}{4}[b - A - \sqrt{(b-A)^2 - 16a}]$$
$$= \tfrac{1}{4}[b - A + \sqrt{(b-A)^2 - 16a} : \tfrac{1}{4}[b + A + \sqrt{(b+A)^2 - 16a}];$$

48) $5\frac{0}{0}$; 49) $\sqrt[9]{\frac{a^4 c}{b^2}}$, $\sqrt[9]{\frac{b^4 a}{c^2}}$ und $\sqrt[9]{\frac{c^4 b}{a^2}}$; 50) das Produkt p der beiden Zahlen ist durch die Gleichung $2p^3 - 9a^2p^2 + 6a^4p - a^6 + b = 0$ gegeben, u. s. w.; 51) $\frac{gp'(p - p'')}{p(p'' - p')}$; 52) 1 Brod kostete 3 Kr. und 1 Flasche Wein 15 Kr.; 53) A 10 Fl. 40 Kr. B 9 Fl. 36 Kr., C 10 Fl. 54 Kr., D 11 Fl. 40 Kr. und E 9 Fl. 58 Kr.; 54) 25 Meilen; 55) A 5 und B 120 Louisd'or;

56) 36 Klafter lang und 32 Klafter breit; 57) 400 Thlr.; 58) 72 Flaschen und 36 Ohm; 59) 12 Männer, und jeder erhielt 7 Thlr., 14 Weiber, und jede bekam 6 Thlr.; 60) A 80 Thlr. zu 5 % u. B 120 Thlr. zu 4 %; 61) 21, 6 Jahr; 62) 13268,5 Thlr.; 63) 15417, 18 Thlr.; 64) 31, 4 Jahre; 65) 962,347 Klafter; 66) 144 Ochsen; 67) der Monat Februar in einem Schaltjahre; 68) 9 Stuben; 69) die Zahlen der arithmetischen Progression sind 3, 6, 9 und die der geometrischen 6, 18, 54; 70) der Prinz 21, und der Vater 56 Jahre; 71) 51 Schüler waren überhaupt in der Schule, und 6 befanden sich in der ersten, 17 in der zweiten und 28 in der dritten Klasse; 72) 322 Fuß; 73) 16 Gärten; 74) $\frac{9}{4}$ Ellen tief, 9 Ellen breit und 72 Ellen lang; 75) 11 Kaufleute; 76) 12 Enten gegen 18 Hühner; 77) 7 oder 8 oder 10; 78) 2 Fuß dick, 7 Fuß hoch und 35 Fuß lang; 79) Es konnten sein:

$$\left\{\begin{array}{llllll} \text{Ochsen} & 2, & 4, & 6, & 8 \text{ ꝛc.} & 2(n+1) \\ \text{Kühe} & 26, & 23, & 20, & 17 \text{ ꝛc.} & 26-3n \end{array}\right\};$$

$$80) \left\{\begin{array}{llllll} \text{Männer} & 1, & 2, & 3, & 4, \ldots & n+1 \\ \text{Frauen} & 18, & 16, & 14, & 12, \ldots & 18-2n \\ \text{Kinder} & 11, & 12, & 13, & 14, \ldots & n+11 \end{array}\right\};$$

81) 837, 3357, 5877 u. s. w.; 82) Es konnten sein:

$$\left\{\begin{array}{l} v = 87,\ 174,\ 261,\ 348 \text{ ꝛc.} \ldots \\ w = 127,\ 254,\ 381,\ 508 \text{ ꝛc.} \ldots \\ x = 147,\ 294,\ 441,\ 588 \text{ ꝛc.} \ldots \\ y = 159,\ 318,\ 477,\ 636 \text{ ꝛc.} \ldots \\ z = 167,\ 334,\ 501,\ 668 \text{ ꝛc.} \ldots \\ S = 207,\ 414,\ 621,\ 828 \text{ ꝛc.} \ldots \end{array}\right\};$$

$$83) \text{ Es ist } \left\{\begin{array}{l} z = 2,\ 2,\ 2 \text{ ꝛc.} \\ x = 5,\ 13,\ 21 \text{ ꝛc.} \\ y = 13,\ 38,\ 63 \text{ ꝛc.} \end{array}\right\};$$

84) 849; 85) 52 Jahre; 86) 7, 1, 9, 5, also Senf die Pflanze; 87) $x = 5$;

88) $a = \frac{g + \sqrt[n]{e.k^m + f}}{b + cd} . c$, $b = \left[\frac{g + \sqrt[n]{e.k^m + f}}{a} - d\right] . c$,

$c = \frac{ab}{g - ad + \sqrt[n]{e.k^m + f}}$, $d = \frac{g + \sqrt[n]{e.k^m + f}}{a} - \frac{b}{c}$,

$e = \left[\left[a\left(\frac{b}{c} + d\right) - g\right]^n - f\right] : k^m$, $k = \sqrt[m]{\frac{\left[a\left(\frac{b}{c} + d\right) - g\right]^n - f}{e}}$,

und $f = \left[a\left(\frac{b}{c} + d\right) - g\right]^n - e.k^m$; 89) $x = \sqrt[m]{\frac{1}{a^{n-1}b}} - c$,

$c = \frac{1}{a^{n-1}b} - x^m$ und $b = \frac{1}{a^{n-1}(x^m + c)}$; 90) $x = 2$

91) $x=3$; 92) zu $100.\frac{a-b}{bn}$ Procent; 93) $x=1$;

94) $x=a\sqrt{\frac{1}{5}}$; 95) $x=\frac{4b^2+c^2}{4ac}$; 96) $x=\frac{a}{2}$; 97) $x=a.\sqrt{\frac{1}{2}}$;

98) Es entstehen $\sqrt{\frac{Z}{a}}$ gleiche Zahlen, jedesmal wird der $1+\sqrt{\frac{Z}{a}}$ Theil des gebliebenen Restes genommen, und jede Menge ist $=\sqrt{aZ}$;

99) die Entfernung der Orte α und β ist $=\frac{2abn}{b-a}$ Meilen, A war über β hinaus $a\,\frac{(b-a).m-2bn}{b-a}$ Meilen und B über α hinaus $b\,.\,\frac{(m-n)(b-a)-2an}{b-a}$ Meilen; 100) Sie ist $\frac{R(\alpha+\beta+V)}{P-R}$;

101) A hatte $a.\frac{2n+\sqrt{2nm}}{2n-m}$, B hatte $a\,\frac{m+\sqrt{2nm}}{2n-m}$ und beide zusammen $a.\frac{(\sqrt{2n}+\sqrt{m})^2}{2n-m}$; 102) $x=2$ und $x=2\frac{1}{2}$;

103) $x=\frac{a}{b}$ und $x=\frac{b}{a}$; 104) $x=8$ und $x=\left(\frac{494}{49}\right)^3$;

105) Bezeichnet man $n\beta+ma+m\alpha-na$ durch p, so hat A die Summe $S=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4m\alpha(m-n)a}}{2(m-n)}$ und B die $a-S$ eingelegt;

106) 271 und 12; 107) $x=2a$, $x=a$ und $x=-a$;

108) $x=\frac{1}{b}$ und $y=1+\frac{2b}{a}$; 109) $x=\frac{ab}{a-b}$ u. $y=\frac{ab}{a+b}$;

110) $x=c.\sqrt{\frac{b}{a+b}}$ und $y=c.\sqrt{\frac{a}{a+b}}$; 111) die Zahlen sind $\frac{a+\sqrt{4b-3a^2}}{2}$ und $\frac{a-\sqrt{4b-3a^2}}{2}$; 112) Bezeichnen a, b, c, d, ... y, z die Mengen, welche A, B, C, D, ... Y, Z vor dem Spiele hatten, so erhält man die n Gleichungen:

$$2^{n-1}[a-b-c-d\ldots.-y-z)=\alpha,$$
$$2^{n-2}[(2^2-1)b-a-c-d\ldots.-y-z]=\alpha,$$
$$2^{n-3}[(2^3-1)]c-a-b-d\ldots.-y-z]=\alpha,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$2^2[(2^{n-2}-1)x-a-b\ldots.-y-z]=\alpha,$$
$$2[(2^{n-1}-1)y-a-b\ldots.-x-z]=\alpha,$$
$$(2^n-1)z-a-b\ldots.-y-z=\alpha,$$

da aber nun alle zusammen, sowohl vor als nach dem Spiele, $n\alpha$ Thaler besaßen, so ist

$$a+b+c+\ldots.+x+y+z=n\alpha,$$

und addirt man diese Gleichung zu jeder der n aufgestellten, nachdem man vorher mit den jedesmaligen Faktoren vor der Klammer dividirte, so folgt:

$a=n\left(n+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\cdot\frac{\alpha}{2}$, $b=\left(n+\frac{1}{2^{n-2}}\right)\cdot\frac{\alpha}{2^2}$, $c=\left(n+\frac{1}{2^{n-3}}\right)\cdot\frac{\alpha}{2^3}$, ..., $y=(n+\frac{1}{2})\cdot\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ und $z=(n+1)\cdot\frac{\alpha}{2^n}$;

113) $\frac{7a+6}{7}$ und $\frac{9-11a}{11}$, wo für a jede positive Zahl, welche kleiner als $\frac{9}{11}$ ist, gesetzt werden kann; 114) der Minuend ist $\frac{7a+6}{7}$ und der Subtrahend $\frac{11a-9}{11}$, wobei für a jede positive Zahl, die größer als $\frac{9}{11}$ ist, gesetzt werden kann; 115) für x der Werth $\frac{6p+140}{60-p^2}$ und für y der zugehörige $\frac{3p^2+70p}{5(60-p^2)}$ oder $-\frac{36+14p}{60-p^2}$, wo für p jede rationale Zahl gesetzt werden kann; 116) 264; 117) $\left\{\begin{array}{l}\text{B konnte haben } 3,\ 8,\ 15,\ 24 \text{ ꝛc. ....}\\ \text{A } \quad = \quad = \quad 21,\ 32,\ 45,\ 60 \text{ ꝛc. ....}\end{array}\right\}$;
118) 23, $\frac{5+\sqrt{57}}{16}$ und $\frac{5-\sqrt{57}}{16}$; 119) 3 oder $\frac{-3+\sqrt{-23}}{2}$ oder $\frac{-3-\sqrt{-23}}{2}$; 120) es ist $z=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-2(a^2-b^2)}}{2}$ und aus $x+y=a-z$ und $xy=cz$ sind auch x und y als gefunden anzusehen; 121) 418; 122) die Differenz ist $=\sqrt{\frac{5b^2-s^2}{50}}$ und das erste Glied beträgt $\frac{s-\sqrt{2(5b^2-s^2)}}{5}$;
123) $d=\sqrt{\frac{25b^3-s^3}{150s}}$ und $a=\frac{s}{2}-2\sqrt{\frac{25b^3-s^3}{150s}}$;
124) 4 oder 5 Tage, und den fünften Tag machen beide gleich große Wege; 125) der erste nach der Progression 5, $5\frac{1}{4}$, $5\frac{2}{4}$ ꝛc., und der zweite nach der Reihe 4, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$ ꝛc.; 126) sind $\frac{n}{e}$ und $\frac{m}{e}$ ganze Zahlen, so ist der ganze Kostenbetrag

$$=\left[a+\frac{m-e}{n-e}\cdot\frac{Se-an}{n}\right]\frac{m}{e};$$

127) $x=\frac{1}{1-\sqrt[n]{1-\frac{c}{b}}}$.

Druckfehler.

Seite 32 Zeile 7 v. o. statt $x^{-2}b^{-5}$ lies $x^{-2}b^{-5}c$.

„ 76 „ 4 v. u. statt $x - 28\frac{5}{3}$ lies $x = -28^{\frac{5}{3}}$.

„ 129 „ 3 v. u. vor $\frac{5}{490314}$ lies 192).

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Götz, Jakob,

Sammlung von Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben aus der gewöhnlichen Rechenkunst, Mathematik und Physik

Bd.: 2

Berlin 1843

Math.u. 308 h-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594471-9